



**BENEMÉRITA  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA  
COMPUTACIÓN**

**ASPECTOS FÍSICOS Y NUMÉRICO-  
COMPUTACIONALES DE ALGUNOS  
PROBLEMAS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS**

**TESIS QUE PRESENTA:  
LUIS RAÚL DURAN ANAYA**

**PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE:  
INGENIERO EN CIENCIAS DE LA  
COMPUTACIÓN**

2008

**ASESOR:  
BLANCA BERMÚDEZ JUÁREZ**

## Agradecimientos

Quiero agradecer a la Dra. Blanca Bermúdez Juárez, asesora de esta tesis, por todo el apoyo, paciencia, atención y esmero durante el desarrollo de esta tesis.

Agradezco al Dr. Alfredo Nicolás Carrizosa, co-asesor por su apoyo, los consejos y correcciones realizadas, que resultaron muy valiosos en la realización de este trabajo.

A mis padres por esas palabras de aliento cuando más las necesite.

*De gente bien nacida es agradecer los beneficios que recibe.*

Miguel de Cervantes Saavedra

## SUMARIO

Se presenta un esquema numérico para resolver las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo de fluidos viscosos, incompresibles e isotérmicos, dependientes del tiempo en dos dimensiones en dominios rectangulares gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando la formulación función corriente-vorticidad. Los resultados de este trabajo son obtenidos a partir de un esquema numérico basado en un proceso de iteración de punto fijo aplicado a un sistema de ecuaciones no lineales elíptico que resulta de una discretización de segundo orden en el tiempo. Este método iterativo nos lleva a la solución de problemas elípticos lineales, simétricos, bien condicionados y desacoplados. Ejemplos de fluidos isotérmicos son asociados con el problema de la cavidad cuadrada y el problema del vórtice de Taylor.. Para mostrar la eficiencia del esquema se muestran resultados con números de Reynolds grandes,  $Re \leq 7500$ , y mallas finas, obteniendo muy buenos resultados en comparación a otras investigaciones, donde se hace uso de números de Reynolds “chicos” y mallas gruesas, lo cual implica que la solución puede tornarse complicada.

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. ANTECEDENTES TEÓRICOS .....	5
2.1 Hipótesis del Medio Continuo.....	5
2.2 Descripción Euleriana y Lagrangiana .....	7
2.3 Fluidos .....	8
2.4 Características de los Fluidos .....	10
2.4.1. Presión y temperatura.....	10
2.4.2. Viscosidad .....	10
2.4.3. Densidad.....	11
2.4.4. Compresibilidad .....	12
2.5 Tipos de Fluidos .....	13
2.5.1. Fluidos Newtonianos.....	13
2.5.2. Fluidos No Newtonianos.....	13
2.6 Regímenes de Flujo .....	14
2.7 Leyes de Conservación.....	15
2.7.1. Ley de Conservación de la masa .....	15
2.7.2. Ley conservación de la cantidad de movimiento .....	15
2.7.3. Ley de conservación de la energía .....	16
2.8 Ecuaciones de Navier-Stokes .....	16
2.9. Ecuaciones de Navier-Stokes en variables primitivas.....	18
2.10. Formulación función Corriente-Vorticidad .....	20
2.11. Vorticidad .....	22
3. Esquema numérico y resultados numéricos.....	24
3.1 Esquema numérico .....	24
3.2 Vórtice de Taylor.....	26
3.3 Graficas de la solución para el problema Vórtices de Taylor .....	28
3.4 El problema de la Cavity Cuadrada .....	37
3.5 Graficas de la solución para el problema Cavity Cuadrada.....	39
4. Conclusiones.....	44
Referencias .....	46

## 1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consta de una introducción al análisis numérico y a la teoría matemática de los fluidos, con especial atención a aquellos sistemas de ecuaciones que rigen el movimiento de los distintos tipos de fluidos reales.

Como antecedente a este estudio se comienza con la presentación del concepto de medio continuo [1], [2], [3] y [4] y la introducción de algunas otras definiciones bastante útiles. El estudio continúa con una sección en la cual se muestran las ecuaciones fundamentales de los medios continuos como la ley de conservación de masa, la cantidad de movimiento y la conservación de energía [1], [5], [6] y [7]. Además en este trabajo se introducen de forma gradual las herramientas matemáticas necesarias, para hacer más fácil la comprensión de diversas áreas de interés científico o tecnológico.

Otro punto de interés, es la clasificación de los distintos tipos de fluidos, los de mayor interés en [8], [9], [10] [11], [12] y [13]. Se contemplan las dos grandes divisiones, la primera de ellas, en fluidos ideales y la segunda en fluidos reales viscosos. Posteriormente se formulan respectivamente las leyes de Euler y Navier-Stokes, que son las utilizadas para dar solución a nuestro problema práctico. Más adelante se presentan los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que se originan [14], [15], [16] y [5]. Se estudian los ejemplos de flujos más característicos y se aborda el problema de la solución numérica.

Se debe tener en cuenta que todos los tipos de fluidos aquí estudiados pueden verse como casos particulares de los fluidos compresibles viscosos, y así lo muestra la formulación matemática en forma de ecuaciones en derivadas parciales utilizada (formulación función corriente-vorticidad) [17], [18] y [19]. Ahora bien, dado el estado aun en desarrollo de la teoría de los fluidos compresibles y viscosos, los cuales muestran una extraordinaria complejidad, el estudio en detalle es de gran interés.

En este trabajo de Tesis uno de los objetivos principales es el de describir el comportamiento de las sustancias llamadas fluidos, cuyos principales representantes son el agua y el aire [20] y [21]. La primera es el modelo de las sustancias que fluyen de forma incompresible, sin cambiar de volumen, y con ella se clasifican los líquidos; el segundo de ellos que lo hacen de forma compresible, y con él se engloban los gases. Una aplicación en la que aparecen de diversas formas los líquidos y gases son: durante los procesos de *combustión*. No nos interesa la composición macroscópica de estas sustancias sino que se pretende describir su forma de movimiento, así como los posibles estados (estacionario o no estacionario), por medio de las variables adecuadas: velocidad, presión, temperatura y algunos parámetros, como la viscosidad; etc. Entre las cuales se establecen las leyes que rigen la estabilidad o el cambio (leyes de conservación).

El estudio de los modelos matemáticos de la teoría de los fluidos, que incluye o introduce a los problemas relacionados con un gran número de ciencias, atrae en nuestro país a un gran número de investigadores. Al mismo tiempo, el desarrollo de los métodos de cálculo ha llevado a una más estrecha colaboración de matemáticos, físicos e ingenieros en el tratamiento de los problemas que las nuevas tecnologías proponen.

Una lista de importantes áreas de aplicación actual en la teoría matemática de los fluidos es: la Aeronáutica (en sus derivados de aerodinámica y combustión); la Meteorología, la Oceanografía, Geofísica, Hidrología, la Industria del Petróleo, procesos industriales a altas temperaturas, Astrofísica. En otras áreas de aun reciente aparición se encuentran las Ciencias Ambientales y la Ecología: problemas de contaminación, control de recursos y residuos, La industria Automovilística, pues los autos avanzan contra la resistencia que les ofrece el aire, Biomedicina, pues la sangre es un fluido no Newtoniano (aquí se plantea el importante problema de interacción fluido-estructura).

La idea principal es que los actuales desarrollos de la mecánica de fluidos exigen de la comprensión matemática para su futura aplicación. Por ello se ha tratado con el mayor cuidado las ecuaciones pertinentes para formular el correcto planteamiento matemático del problema. Durante el recorrido a lo largo de este escrito se incluirá la teoría básica de los fluidos, mostrando al mismo tiempo la relación entre las ecuaciones *reales* y las simplificaciones obtenidas, de esta forma se pueden ver el contexto en el que se aplican. Como un complemento se espera mostrar como los fluidos nos llevan del mundo real a tratar con las diferentes áreas de la ciencia incluida por supuesto las matemáticas.

Estos estudios multidisciplinarios están destinados a solucionar problemas de la vida cotidiana así como para desarrollar nueva tecnología y descubrir nuevos campos de la ciencia. Las aplicaciones de la mecánica de fluidos son variadas, ya que todo depende de los fluidos, directa e indirectamente. Un ejemplo claro para demostrar tal afirmación es el suponer que la tierra está conformada por un **97.25%** de agua la cual corresponde a los océanos (sin contar subsuelos, ríos y lagos) [21].

La simulación numérica de procesos físicos se ha convertido actualmente, gracias a los avances de las computadoras, en una herramienta de diseño de gran utilidad.

Las técnicas de simulación numérica en [17], [18], [19], [22], [23], [24], [25] y [26] presentan ciertas ventajas respecto a los ensayos experimentales, como gran flexibilidad en las variables a medir y en los cambios de la geometría del problema, inversión económica reducida, resultados en un plazo corto de tiempo, etc. Sin embargo, los resultados conseguidos mediante simulaciones numéricas deben ser interpretados siempre con cuidado, siendo conscientes de que su exactitud dependerá en gran medida del modelo matemático que representa el proceso físico y de la técnica numérica empleada para resolver las ecuaciones. Las predicciones de simulaciones numéricas deberán ser siempre contrastadas con resultados experimentales y con otros resultados que se consideren correctos.

Para su análisis vamos a proceder como en el análisis de cualquier otro sistema material. Comenzaremos por la Cinemática en [8], [15] y [27]. Entendiendo por tal, las variables que vamos a utilizar, así como el tipo de objetos matemáticos con que los vamos a representar y sus relaciones o propiedades operativas. Veremos que en los sistemas físicos, existen lo que llamaremos escalares, vectores y más generalmente, tensores [1] y [28]. El distinguir el tipo de objeto geométrico asociado a una propiedad física es una de las características más importantes de su definición. La temperatura es una propiedad escalar, que no es de tipo

global, pues distintas partes de un sistema extenso pueden tener distintas temperaturas. Es una propiedad local, que en sentido estricto está definida en cada punto del sistema. La masa del sistema es otra propiedad escalar, pero esta es de tipo global. Sin embargo, distinguiremos la masa global de la masa de pequeñas porciones infinitesimales de materia, lo que nos llevará al concepto de densidad. La densidad de un medio material será, por lo tanto una propiedad escalar local, definida en cada punto del medio continuo. El desplazamiento de un punto, su velocidad, son magnitudes vectoriales, puesto que además de tener una magnitud, involucran una dirección en el espacio. Todas estas propiedades dependen del punto y del instante en que las estamos midiendo. Se dice que estas magnitudes tienen un campo. Así, hablaremos del campo de temperatura, campo de densidad, de velocidad, de desplazamiento, etc. El medio en el que están definidas es un medio continuo, se refleja en la propiedad matemática de que todas estas magnitudes vienen caracterizadas por funciones continuas (y derivables) del espacio y del tiempo.

Cuando a un sistema físico le sometemos a fuerzas externas, esto produce modificaciones tanto en la forma como en la evolución del sistema. Estudiaremos por lo tanto, las deformaciones que se producen en los sistemas continuos y su forma de describirlo, así como las leyes generales que nos permiten determinar la evolución temporal del sistema y de sus partes, que se conoce genéricamente con el nombre de dinámica.

En estos capítulos, va a quedar descrito de forma general las herramientas que se van a utilizar para tratar un sistema físico que consideremos como un medio continuo. Su utilidad la veremos en el estudio de dos tipos diferentes de medios continuos: los medios materiales sólidos y los medios fluidos. No existen medios materiales estrictamente rígidos. En general todos los sistemas materiales se deforman en mayor o menor grado. De una forma general podríamos decir que un sólido es un medio material que se resiste a ser deformado. Un fluido, en cambio, es un medio material que parece que se puede adaptar a la forma de cualquier recipiente y, por lo tanto, su característica principal no es que no se deforme, sino que en general ofrecerá resistencia a los posibles cambios en su estado de deformación.

El objeto de estudio de los sistemas materiales líquidos, es lo que constituye el cuerpo de la mecánica de fluidos (y el área de mayor importancia en este estudio). Entre los fluidos, examinaremos los fluidos ideales y los fluidos reales o viscosos. Veremos que la viscosidad juega un papel fundamental. Si el aire no fuera viscoso los aviones no volarían [1].

La mecánica de fluidos se ha dividido en diferentes ramas que cubren diferentes aspectos de la ingeniería, la física, las matemáticas, etc.

Es válido mencionar algunos temas de investigación matemática extras que están excluidos de este documento pero aun así son de gran interés como: el estudio de los fluidos compresibles, que incluye el estudio matemático de las ondas de refracción y de choque para múltiples aplicaciones: Aeronáutica, Acústica, etc. Muchos otros temas relacionados con la turbulencia y las inestabilidades, procesos que involucran reacciones químicas, como los procesos de cambio de fase y los problemas de frontera libre, la magneto hidrodinámica, los procesos de tipo convectivo, procesos dispersivos, etc. Modelos de fluidos se utilizan con éxito en el desarrollo de otras ciencias, como sucede en

los semiconductores. Por otra parte aquí solamente se presenta la parte básica de muchas de estas áreas.

El estudio de los fluidos en reposo o con movimiento, es principalmente de tipo analítico y matemático (no empírico).

Históricamente el hombre ha necesitado y utilizado los fluidos y aun sin los desarrollos analíticos necesarios, construyó grandes obras de Ingeniería Hidráulica tales como los acueductos Romanos, canales de navegación e irrigación.

Exceptuando las ideas de Arquímedes sobre flotación es hasta Leonardo Da Vinci cuando se inicia el estudio analítico de la mecánica de los fluidos, y el estudio de las leyes de flotación de las aves, principios del flujo de fluidos para transportar agua en un canal cercano a Milán entre otros [15].

Posterior a Da Vinci se presentó un rápido crecimiento en el conocimiento de las leyes fundamentales, como el aporte de Galileo, Torricelli, Pascal, Newton, Bernoulli, Euler y Lagrange entre otros. Estos últimos fueron quienes elaboraron una síntesis hidrodinámica perfecta, pero con resultados diversos en la realidad, lo que llevó a la creación de una rama experimental que con la ayuda de los descubrimientos de Reynolds, Froud y Rayleigh complementaron adecuadamente el fenómeno físico y los resultados experimentales.

En este trabajo se presentan fluidos viscosos, incompresibles e isotérmicos en 2D en dominios rectangulares gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando la formulación función corriente-vorticidad, la cual es más sencilla de obtener que la formulación en variables primitivas, debido a que la restricción de incompresibilidad se satisface automáticamente, y no es necesario calcular la presión lo cual reduce el trabajo. Por último se muestran las gráficas y las conclusiones obtenidas a partir de dos ejemplos analizados el vórtice de Taylor y el problema de la cavidad cuadrada.

## 2. ANTECEDENTES TEÓRICOS.

En este capítulo se describen algunos conceptos básicos para la futura comprensión de los temas desarrollados en este trabajo de Tesis.

Ahora se introducirán los primeros conceptos y las hipótesis relativas al medio continuo. Se da la notación adecuada y la diferencia fundamental entre la formulación Lagrangiana y la Euleriana.

### 2.1. Hipótesis del medio Continuo.

Es posible analizar sistemas extensos de materia, como si ésta estuviera constituida por un todo continuo, sin espacios vacíos. Una roca, un recipiente con agua, el aire que nos rodea, son sistemas materiales, que si pretendemos hacer de ellos una descripción macroscópica sin reparar en el detalle a la escala atómica, aparecen como un medio continuo [1].

Se trata de aproximar los sistemas extensos mediante la hipótesis de que un sistema material de muchas partículas puede ser considerado como continuo. Son situaciones en las que el comportamiento macroscópico del sistema material se explica sin tener presente su estructura molecular. A diferencia, de lo que se plantea con la teoría atómica en [2] según la cual la materia está discretizada. Todas las propiedades del sistema como densidad, presión, velocidades, aceleraciones, estado de tensiones, etc., serán funciones continuas en el espacio y en el tiempo.

La Mecánica de Fluidos es la ciencia que se encarga de estudiar todo lo relacionado con el movimiento de los fluidos y el medio que lo rodea, de aquí se desprende la hipótesis del medio continuo, en la que se basa esta rama de la Física.

El objeto de la Física de los Medios Continuos en [1], [2], [3] y [4] es el estudio de los sistemas materiales cuya apariencia a escala microscópica es la de un todo continuo. El análisis y desarrollo teórico de la física de los medios continuos fue el objeto de estudio de la Física del siglo XIX. Termodinámica, Mecánica Estadística, Teoría de la Elasticidad, Mecánica de Fluidos, Electromagnetismo, son algunos de los grandes campos de aplicación de la Física de los Medios Continuos.

Iniciaremos nuestro recorrido por el mundo de los fluidos con unas consideraciones preliminares un tanto intuitivas que nos servirán para enmarcar el estudio y sentar algunas ideas básicas.

¿Es necesario considerar el comportamiento a nivel molecular de los fluidos?

En los fluidos la materia no se encuentra distribuida de forma continua a nivel molecular [2], en el caso de poder utilizar un instrumento de medición lo que estaríamos haciendo es obtener datos respectivos a una muestra de un cierto volumen, al hacer esto no afectamos al fluido en su totalidad ya que la porción que extraemos es muy pequeña. La razón por la que

la estructura molecular no afecta el resultado final es porque dentro de ella hay una enorme cantidad de moléculas que nos darán las características y el comportamiento de dicho fluido.

Un fluido es un medio continuo [8], es decir, se mueve (se deforma) en forma continua punto a punto, “espacialmente hablando”, en el tiempo, y forma un todo continuo. De forma intuitiva pensamos que tal medio esta compuesto por partículas y es cierto desde el punto de vista físico [1].

Ahora bien la Mecánica es una ciencia física que trata de describir el comportamiento de los cuerpos (sólidos, líquidos, gases o plasma) y apoya por tanto su formulación matemática en la experiencia y la teoría [9]. Al respecto, el concepto fundamental del medio continuo es un concepto bastante interesante que se encuentra en contradicción con la ya verificada teoría atómica: la cual describe la realidad a nivel de átomos. A la hora de realizar cierto tipo de cálculos matemáticos se tiende a resolver tal situación ignorando dicha teoría atómica y optando por el medio continuo. Pues bien, de ahora en adelante ésta será la suposición básica. Ello merece una explicación, que es: construir un modelo matemático que sirva como modelo de una *realidad* [15]. Este modelo con el cual trabajaremos debe representar el aspecto del fenómeno, siendo eficaz al reflejar el funcionamiento observado y posteriormente poder predecir cierta evolución, desde el punto de vista matemático por las ecuaciones y la complejidad que se originan de esta última, y por último pero no menos importante desde el punto de vista computacional.

En el estudio de la Mecánica de Fluidos es conveniente suponer que los fluidos están continuamente distribuidos dentro de una región muy particular esto es, el fluido se trata como un medio continuo. Los cuerpos difieren por lo general en su masa y en su volumen. Estos dos atributos físicos varían de un cuerpo a otro, de modo que si consideramos cuerpos de la misma naturaleza, cuanto mayor es el volumen, mayor es la masa del cuerpo considerado. No obstante, existe algo característico del tipo de materia que compone al cuerpo en cuestión y que explica el porqué dos cuerpos de sustancias diferentes que ocupan el mismo volumen no tienen la misma masa o viceversa. Aun cuando para cualquier sustancia la masa y el volumen son directamente proporcionales, la relación de proporcionalidad es diferente para cada sustancia.

Una forma de comprobar si el modelo del medio continuo es aceptable en [35], es la de comparar una longitud característica  $l$  del objeto de interés con la **trayectoria libre media**  $\lambda$ , la distancia promedio que recorre una partícula antes de colisionar con otra; si  $l \gg \lambda$  el modelo del medio continuo es aceptable.

La trayectoria libre media se deriva de la teoría molecular. Así,

$$\lambda = 0.225 \frac{m}{\rho d^2}, \quad (2.2)$$

donde  $m$  es la masa ( $kg$ ) de una molécula,  $\rho$  es la densidad ( $kg/m^3$ ) y  $d$  es el diámetro ( $m$ ) de una molécula.

En base a esta suposición del medio continuo, las propiedades de un fluido pueden ser aplicadas uniformemente en todos los puntos de una región dada en cualquier instante en particular. Por ejemplo, la densidad  $\rho$  se define en todos los puntos del fluido; puede variar en el espacio y tiempo.

En resumen podemos decir que en la hipótesis del medio continuo se considera al fluido como continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a este. Con esta hipótesis se puede considerar que las propiedades del fluido (densidad, temperatura, etc.) son funciones continuas.

Por esta razón cuando se habla de Mecánica de Fluidos se toma en cuenta esta hipótesis y por tanto no tendremos que preocuparnos por la estructura molecular de nuestros fluidos.

## **2.2. Descripción Euleriana y Lagrangiana.**

A la hora de describir el movimiento de un fluido existen dos puntos de vista [9]. Una primera forma de hacerlo es seguir a cada partícula fluida en su movimiento, de manera que buscaremos unas funciones que nos den la posición, así como las propiedades de la partícula fluida en cada instante. Ésta es la descripción Lagrangiana. Una segunda forma es asignar a cada punto del espacio y en cada instante un valor para las propiedades o magnitudes fluidas sin importar la partícula fluida que en dicho instante ocupa ese punto. Ésta es la descripción Euleriana, que no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido. En esta descripción el valor de una propiedad en un punto y en un instante determinado es el de la partícula fluida que ocupa dicho punto en ese instante.

La descripción Euleriana es la usada comúnmente, puesto que en la mayoría de casos y aplicaciones es más útil. Esta descripción es la más usada para la obtención de las ecuaciones generales de la Mecánica de Fluidos.

## **2.3. Fluidos.**

Un fluido podría definirse como aquella sustancia que continuamente se esta deformando debido la poca cohesión intermolecular que existe en ellos, carecen de forma propia y adoptan la forma del recipiente que los contiene, además al ser sometido a un esfuerzo cortante se deforma continuamente sin importar la magnitud de éste. Los fluidos son una fase de la materia e incluyen líquidos, gases, plasma, y en otro sentido plásticos y sólidos [8], [30].

La diferencia entre el fluido líquido y el gaseoso radica en que las partículas que componen un líquido se encuentran más unidas que las de un gas; por esta razón, el volumen del líquido dentro de un recipiente, permanece constante con una superficie límite bien definida, mientras que el gas no posee límite y se difunde en el espacio considerado, disminuyendo su densidad y también pueden comprimirse aumentando su densidad. La

diferencia entre sólidos y fluidos no es muy obvia, pero se da al evaluar la viscosidad de la sustancia con la que nos encontramos trabajando.

Los plásticos son los que se comportan como fluidos o como sólidos, dependiendo de la tensión tangencial de rozamiento que actúe sobre ellos y que fluyen únicamente cuando alcanzan la denominada tensión crítica de flujo [17] y [18]. A continuación se presentarán diversos tipos de fluidos existentes así como gases.

#### a) **Fluido ideal**

El concepto de *fluido ideal* es útil en el estudio de la dinámica de fluidos. Se trata de un fluido imaginario que no ofrece resistencia al desplazamiento (no viscoso), es permanente, no-rotacional, incompresible y en general tri-dimensional.

#### b) **Gas Ideal y Gas Real**

A continuación se definirá el concepto de gas ideal o perfecto. Para ello se mencionaremos previamente las leyes que satisfacen a los gases.

Los gases tienen la propiedad de llenar el espacio donde se almacenan y ejercer una presión sobre las paredes de dicho contenedor. Una cierta cantidad de gas, se caracteriza por las siguientes magnitudes físicas: su masa  $m$ , el volumen que ocupa  $V$ , la presión a la que se encuentra  $p$  y su temperatura  $T$ .

#### c) **Ley de Boyle**

La ley de Boyle establece que la presión de un gas en un recipiente cerrado es inversamente proporcional al volumen del recipiente. Esto quiere decir que si el volumen del contenedor aumenta, la presión en su interior disminuye y, viceversa, si el volumen del contenedor disminuye, la presión en su interior aumenta. Esta ley puede escribirse como:

$$pV = \text{constante} \quad (T = \text{Constante}), \quad (2.3)$$

Esta ley cuenta con un rango limitado de validez: a temperaturas próximas a la temperatura ambiente y a presiones no muy superiores a la atmosférica, la mayoría de los gases satisfacen esta ley. Sin embargo, a grandes presiones, los gases se comprimen menos de lo que se espera según la ley.

#### d) **Ley de Charles y Gay-Lussac**

Mientras que los experimentos realizados a temperatura constante condujeron a la ley de Boyle, los experimentos realizados para determinar la variación de la presión con la temperatura manteniendo el volumen constante, o las experiencias encaminadas a determinar la variación del volumen con la temperatura manteniendo la presión constante, demostraron divergencias importantes. No fue hasta tiempo después de la aparición de la ley de Boyle cuando mediciones más precisas que eliminaban los errores anteriores

permitieron establecer que el aumento de la presión, manteniendo el volumen del gas constante, es proporcional al aumento de la temperatura.

#### e) Ley de Charles

Esta ley establece, que, a volumen constante, la presión de una masa fija de un gas dado varía de forma lineal con la temperatura:

$$p = p_0(1 + \beta T) \quad (V = \text{Constante}), \quad (2.4)$$

En donde  $p_0$  es la presión a la temperatura de cero grados centígrados,  $t = 0^\circ\text{C}$  y  $\beta$  es el coeficiente de dilatación a volumen constante o coeficiente térmico de presión.

#### f) Ley de Gay-Lussac

Establece que el volumen de un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta, asumiendo que la presión se mantiene constante. Esto quiere decir que en un recipiente flexible que se mantiene a presión constante, el aumento de temperatura conlleva un aumento del volumen y se define como:

$$V = V_0(1 + \alpha T) \quad (p = \text{Constante}), \quad (2.5)$$

en donde  $p_0$  es la presión a la temperatura de cero grados centígrados,  $T = 0^\circ\text{C}$  y  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación a presión constante también llamado coeficiente de dilatación cúbica.

Teniendo en cuenta todas estas leyes los gases reales son los que en condiciones ordinarias de temperatura y presión se comportan como gases ideales; pero si la temperatura es muy baja o la presión muy alta, las propiedades de los gases reales se desvían en forma considerable de las de los gases ideales.

Se considera que un gas ideal presenta las siguientes características: el número de moléculas es despreciable comparado con el volumen total de un gas, no hay fuerza de atracción entre las moléculas, las colisiones son perfectamente elásticas y evitando las temperaturas extremadamente bajas y las presiones muy elevadas, podemos considerar que los gases reales se comportan como gases ideales.

### 2.4. Características de los fluidos.

La materia puede existir en diversas formas de agregación de las partículas permitiendo así distinguir los diferentes estados de la materia: Sólido, Líquido, Gaseoso y Plasma. Estos diferentes estados en [1] y [7] se pueden identificar por algunas características que se presentan a continuación.

### 2.4.1. Presión y temperatura.

Tanto la presión como la temperatura son variables (dependientes de la posición  $\vec{x}$  y el tiempo  $t$ ) físicas que pueden ser aplicadas con escalas diferentes por ejemplo, existen escalas absolutas que miden estos parámetros y también escalas que miden estas cantidades con respecto a puntos de referencia.

En Mecánica de Fluidos la presión es un término resultante de una fuerza de compresión normal que actúa sobre un área. La presión se define como:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}, \quad (2.6)$$

donde  $\Delta F_n$  es la fuerza de compresión normal que actúa en el área  $\Delta A$ . Las unidades métricas utilizadas para la presión son  $(N/m^2)$  o *Pascal (Pa)*.

### 2.4.2. Viscosidad.

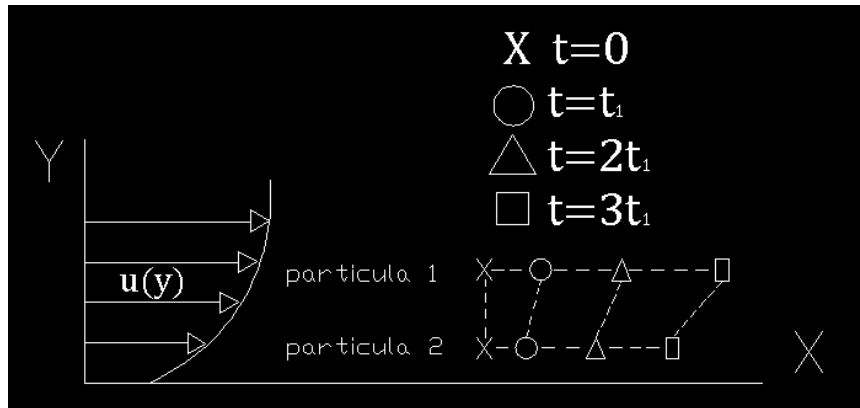
La viscosidad es un parámetro del fluido muy importante para el estudio de los fluidos, está ligada a la resistencia que opone un fluido a deformarse continuamente cuando se le somete a un esfuerzo de corte. Esta propiedad es utilizada para distinguir el comportamiento entre fluidos y sólidos. Un fluido podría considerarse como viscoso si las fuerzas de roce internas que actúan sobre él son apreciables, otra forma de decirlo es que disipa una cantidad apreciable de energía asociada con el transporte de fluidos en ductos, canales y tuberías debido al roce dado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Si la viscosidad del fluido no juega un papel importante en su movimiento, se le llama no-viscoso o ideal expresado por las ecuaciones de Euler. Dependiendo de su viscosidad fluyen a mayor o menor velocidad. Mientras más viscoso fluye con menor velocidad, mientras menos viscoso fluye con mayor velocidad y tienden a comportarse como aquellos fluidos que se pueden desplazar sin presentar resistencia alguna (fluido ideal). Más adelante, estudiaremos fluidos reales, son los que presentan cierta resistencia al fluir.

La viscosidad se debe a las fuerzas que aparecen entre dos partes del fluido que se desplazan una con respecto a la otra. Por lo tanto, la viscosidad es la propiedad de los fluidos que provoca la aparición de esfuerzos o tensiones cortantes y a su vez es responsable de que se produzcan pérdidas y, por lo tanto, que el flujo sea irreversible.

La velocidad de deformación de un fluido esta directamente ligada a su viscosidad. Con un esfuerzo dado, un fluido altamente viscoso se deforma más lentamente que un fluido menos viscoso. Consideremos el flujo de la figura (1) donde 2 partículas del fluido se mueven en la dirección  $x$  a diferentes velocidades, de manera que las velocidades de las partículas  $u$  varían en la coordenada  $y$ . En la figura 1 se muestran dos posiciones de partículas una con respecto a la otra. Para un flujo tan simple como ese, en el que  $u = u(y)$ , la viscosidad  $\mu$  del fluido se define como la siguiente relación:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (2.7)$$

donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante de la ecuación (2.4) y  $u$  es la velocidad en la dirección  $x$ . Las unidades físicas de  $\tau$  son  $(N/m^2)$  y las de  $\mu$  están dadas por  $(N \cdot s/m^2)$ .



**Figura 1:** Movimiento relativo de 2 partículas de fluido en la presencia de esfuerzos cortantes.

La cantidad  $du/dy$  es un gradiente de velocidad, puede ser interpretado como una velocidad de deformación y es una medida de cambio de velocidad, conocida también como rapidez de corte.

La posición relativa de sus moléculas puede cambiar continuamente, esto es que las moléculas ya no permanecen en posiciones fijas, aunque las interacciones entre ellas siguen siendo lo suficientemente grandes para que el líquido pueda cambiar de forma sin cambiar apreciablemente de volumen, adaptándose al recipiente que lo contiene.

### 2.4.3. Densidad.

La principal propiedad para determinar si un medio es continuo es la **densidad**  $\rho$  que se define como:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

donde  $\Delta m$  es la masa incremental contenida en el volumen incremental  $\Delta V$ .

Cuando se aumenta la temperatura de un fluido, los átomos que lo componen comienzan a vibrar (el fluido se expande) ocupando más espacio y, por tanto, aumentando su volumen. Según la relación anterior, al aumentar el volumen la densidad será cada vez más pequeña y el fluido será cada vez más "fluido" [35].

La densidad de una sustancia es una variable dependiente cuya masa corresponde a un volumen de dicha sustancia. A diferencia de la masa o el volumen, que dependen de cada objeto, la densidad depende solamente del tipo de material de que está constituido y no de

la forma ni del tamaño de aquél. Se dice por ello que la densidad es una propiedad o atributo característico de cada sustancia. En los sólidos la densidad es aproximadamente constante, pero en los líquidos, y particularmente en los gases, varía con las condiciones de medida. Así en el caso de los líquidos se suele especificar la temperatura a la que se refiere el valor dado para la densidad y en el caso de los gases se ha de indicar, junto con dicho valor, la presión.

#### 2.4.4. Compresibilidad.

En Mecánica de Fluidos se considera típicamente que los fluidos se dividen en dos categorías que en la mayoría de los casos requieren un tratamiento diferente: los fluidos compresibles y los fluidos incompresibles. Que un tipo de fluido pueda ser considerado compresible o incompresible no depende sólo de su naturaleza o estructura interna sino también de las condiciones mecánicas sobre el mismo. Así, a temperaturas y presiones ordinarias, los líquidos pueden ser considerados sin problemas como fluidos incompresibles, aunque bajo condiciones extremas de presión muestran una compresibilidad estrictamente diferente de cero. En cambio los gases debido a su baja densidad aún a presiones moderadas pueden comportarse como fluidos compresibles. Por estas razones, técnicamente más que hablar de fluidos compresibles e incompresibles se prefiere hablar de los modelos de flujo adecuados para describir un fluido en unas determinadas condiciones de trabajo y por eso más propiamente se habla de flujo compresible e incompresible.

La descripción matemática de un fluido incompresible (es decir de densidad constante) en las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes se hace mediante:

- El campo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$  que nos da la velocidad que tendría una partícula en cada punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  del espacio y cada tiempo  $t$ .
- La presión  $p = p(\mathbf{x}, t)$  del fluido.

Todos los fluidos son compresibles en cierto grado (un fluido se considera compresible si la velocidad del fluido es comparable o mayor que la velocidad del sonido en el fluido.) Normalmente uno puede suponer que los fluidos, incluso el aire a velocidades bajas, son incompresibles (o en otras palabras su volumen permanece constante frente a los cambios de presión que experimenta el fluido).

Consideremos que los líquidos en general son incompresibles, igual que los gases a bajas velocidades.

### 2.5. Tipos de Fluidos.

#### 2.5.1. Fluidos Newtonianos.

Los fluidos se dividen en dos grandes grupos en [1] y [7], los newtonianos y los no newtonianos.

Un fluido newtoniano es aquel que cumple con la ley del rozamiento de Newton, también llamada ley de Newton de la viscosidad.

"Para un determinado fluido, la tensión tangencial de rozamiento aplicada según una dirección es directamente proporcional a la velocidad en la dirección normal a la primera, siendo la constante de proporcionalidad correspondiente el coeficiente de viscosidad". [9]

Este tipo de fluidos presentan una relación lineal entre el esfuerzo y la tasa de deformación que actúan sobre ellos. Ejemplos de este tipo de fluidos comunes que se comportan de esta manera bajo condiciones normales de presión y temperatura son: aire, agua, gasolina y algunos aceites minerales.

### **2.5.2. Fluidos no Newtonianos.**

La otra categoría en [1] está compuesta por los fluidos no Newtonianos:

Son aquellos cuya viscosidad varía con el gradiente de tensión que se le aplica (no lineales). Como resultado, un fluido no Newtoniano no tiene un valor de viscosidad definido y constante a diferencia de un fluido Newtoniano y se clasifican de la siguiente manera:

#### **a) Dilatantes**

Los *Dilatantes* (arenas movedizas, lechadas) al aumentar el esfuerzo cortante la viscosidad aumenta es decir ofrece mayor resistencia al movimiento.

#### **b) Incompresibles**

*Incompresibles* son aquellos en los que su densidad es constante en espacio y tiempo.

#### **c) Plásticos**

*Plásticos* son los que se comportan como fluidos o como sólidos, dependiendo de la tensión tangencial de rozamiento que actúe sobre ellos y que fluyen únicamente cuando alcanzan la denominada tensión crítica de flujo.

#### **d) Plásticos ideales**

Plástico ideal (o *fluidos de Bingham*) a diferencia de los fluidos Newtonianos estos requieren un esfuerzo inicial  $\tau_1$  para comenzar a deformarse pero la viscosidad es constante, La pasta de dientes es un ejemplo que también requiere de un esfuerzo cortante mínimo para empezar a moverse, mas no existe entre ellos un relación lineal esfuerzo-velocidad de deformación.

**e) Pseudoplásticos**

Los *pseudoplásticos* no requieren de esfuerzos iniciales para comenzar el movimiento, pero la viscosidad es variable, a medida que aumenta el esfuerzo cortante, la viscosidad disminuye, es decir ofrece menor resistencia al movimiento. Ejemplos de fluidos pseudoplásticos son: algunos tipos de mostaza, algunas clases de pinturas, suspensiones acuosas de arcilla, etc.

**f) Viscoelásticos**

Los *Viscoelásticos* son los que además de presentar las propiedades de los no newtonianos, están dotados de algunas propiedades que caracterizan a los sólidos, como la elasticidad.

**g) Reopécticos**

Los *Reopécticos* son viscoelásticos cuya viscosidad aparente aumenta cuando lo hace el tiempo de aplicación de la tensión tangente de rozamiento y se llaman tixotrópicos cuando ésta disminuye.

## 2.6. Regímenes de flujo

Al movimiento de un fluido se le conoce como *flujo* [13], el movimiento de los fluidos se puede clasificar de muchas maneras, atendiendo a diversas características. A continuación se mencionarán los diversos tipos de flujos en un fluido.

**a) Régimen Laminar y Turbulento.**

Un flujo se considera *laminar* cuando las partículas de un fluido se mueven a lo largo de trayectorias bastante regulares, de manera que el fluido se puede considerar como un conjunto de capas paralelas entre sí e independientes que se deslizan una sobre la otra.

El régimen es *turbulento*, cuando en el seno del fluido se forman remolinos. Esta turbulencia se puede formar de diferentes formas, ya sea por contacto con sólidos [turbulencia en pared o por contacto con otras capas de fluidos (turbulencia libre)].

El flujo turbulento consiste en un conjunto de torbellinos de diferentes tamaños que coexisten en la corriente del fluido. Continuamente se forman torbellinos grandes que se rompen en otros más pequeños. El tiempo máximo del torbellino es del mismo orden que la dimensión mínima de la corriente turbulenta.

Un torbellino cualquiera posee una cantidad definida de energía mecánica como si se tratase de un trompo. La energía de los torbellinos mayores procede de la energía potencial del flujo global del fluido. Desde un punto de vista energético la turbulencia es un proceso de transferencia, en el cual los torbellinos grandes, formados a partir del flujo global, transportan la energía de rotación a lo largo de una serie continua de torbellinos más pequeños. Por tanto estamos ante una consecuencia del teorema trabajo-energía.

### **b) Flujo estacionario y no estacionario.**

Decimos que un flujo es estacionario o permanente cuando las propiedades y características del flujo, en cada punto del espacio, permanecen invariantes en el tiempo. Por tanto, una característica de los flujos estacionarios es que el campo de velocidad es independiente del tiempo por lo tanto  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ . En caso contrario ( $\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$ ) se dice que el flujo es no estacionario o no permanente, al menos en un intervalo de tiempo que corresponda al estado transitorio.

### **c) Flujo rotacional y no-rotacional**

Si alguna partícula del flujo rota se dirá que el flujo es rotacional. Si ninguna partícula lo hace se dirá que el flujo es no-rotacional.

## **2.7. Leyes de Conservación**

### **2.7.1. Ley de conservación de la masa**

Existen tres leyes que forman la base del estudio de la mecánica de fluidos [1], [5] [6] y [7]. La primera de ellas es la **ley de conservación de la masa**, que establece que la materia es indestructible [7].

Al mencionar la segunda y tercera ley se debe introducir un concepto que es el de *sistema*: en este se define una cierta cantidad de materia en la cual se fijara nuestra atención. Cualquier cosa externa al sistema queda por fuera de los límites de este, tales límites pueden ser reales o imaginarios y además pueden ser también fijos o móviles.

### **2.7.2. Ley de conservación de la cantidad de movimiento**

Segunda ley de fundamental [1], **la conservación de la cantidad de movimiento**: dicha ley establece que la cantidad de movimiento en un sistema dado permanece constante si no hay fuerzas que actúen sobre él. Esto se basa en el principio de la segunda ley de Newton que dice “*La suma de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema es igual a la velocidad de cambio de su cantidad de movimiento lineal*”. [9]

Se puede decir que la segunda ley de Newton, teóricamente describe todos los tipos y escalas de movimiento, sin embargo, en la práctica aun no es posible estudiar y analizar simultáneamente todos estos movimientos, por lo que tradicionalmente se simplifica esta sistema dependiendo de las escalas de movimientos que se quieren estudiar; es decir, las dimensiones espaciales y temporales del fenómeno a estudiar.

### **2.7.3. Ley de conservación de la energía**

La tercera ley fundamental en [1], es la de **conservación de la energía**, la cual también se conoce como la *primera ley de la Termodinámica*. Esta nos dice que la energía total de un sistema aislado permanece constante. Si un sistema está en contacto con sus alrededores, su energía se incrementa sólo si la energía de sus alrededores disminuye respectivamente.

En general para el estudio de fluidos incompresibles estas tres leyes suelen ser más que suficientes, esto es, en la mayoría de los casos aunque también ocurren pequeños cambios en la presión densidad y temperatura, sin embargo para fluidos compresibles, es necesario introducir otras relaciones de modo que los cambios de densidad, temperatura y presión se tomen en cuenta apropiadamente.

En el presente estudio nos enfocaremos en los fluidos incompresibles así que estas tres leyes mencionadas con anterioridad, serán la base para resolver nuestro problema.

## **2.8. Ecuaciones de Navier-Stokes**

Las situaciones físicas en las cuales interviene un fluido son innumerables y la dinámica del mismo puede depender de factores tales como la temperatura, la gravedad o la presencia de un campo magnético.

Las ecuaciones que rigen toda la mecánica de fluidos se obtienen por la aplicación de los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido. Para generalizarlas usaremos el teorema del transporte de Reynolds y el teorema de la divergencia (o teorema de Gauss) para obtener las ecuaciones en una forma más útil.

Las tres ecuaciones fundamentales [1], en general para fluidos compresibles y viscosos, son: la ecuación de continuidad, la ecuación de estado, la ecuación de cantidad de movimiento, y la ecuación de conservación de la energía. Estas ecuaciones pueden darse en su formulación integral o en su forma diferencial, dependiendo del problema. A este conjunto de ecuaciones dadas en su forma diferencial también se les denomina ecuaciones de Navier-Stokes, para fluidos viscosos [4], [17], [19] y [31], y las ecuaciones de Euler, para fluidos no viscosos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en todo tipo de fluidos viscosos.

Estas ecuaciones se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido. Haciendo esto se obtiene la llamada formulación integral de las ecuaciones. Para llegar a su formulación diferencial se manipulan aplicando diferentes teoremas matemáticos, llegando así a la llamada formulación diferencial, que generalmente es más útil para la resolución de los problemas que se plantean en la mecánica de fluidos.

Como ya se ha dicho, las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales para las cuales no existe una solución general debido a su complejidad, por lo que para cada problema concreto de la mecánica de fluidos se estudian estas ecuaciones, buscando simplificaciones que faciliten la resolución del problema. En la mayoría de los casos no es posible obtener una solución analítica, por lo que hemos de recurrir a soluciones numéricas generadas por computadora.

A continuación se muestran las ecuaciones en su forma dimensional.

### Ecuación de Continuidad de la masa

La masa de un medio continuo viene descrita en [1] por la introducción del campo densidad  $\rho$ . Si la densidad es  $\rho_0(X, 0)$  en el instante inicial y ocupa un volumen  $V_0$  y al cabo del tiempo  $t$  tiene una densidad  $\rho(X, t)$  y ocupa un volumen  $V$ , resulta:

$$m = \int_{V_0} \rho_0(X, 0) dV_0 = \int_V \rho(X, t) dV. \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV &= \int_V \left( \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \nabla \rho(x, t) \cdot \mathbf{v} \right) dV + \int_V \rho(x, t) \frac{d}{dt} (dV) \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \nabla \rho(x, t) \cdot \mathbf{v} + \rho(x, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0. \end{aligned}$$

Esto debe ser válido para todo el sistema y para cualquier parte del mismo. Si consideramos un volumen  $\alpha$ , arbitrario e infinitesimal, obtenemos

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \nabla \rho(x, t) \cdot \mathbf{v} + \rho(x, t) \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

por el teorema de la divergencia también se puede expresar así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

La evolución del sistema se dice que es incompresible si cada partícula material (cada elemento infinitesimal) de volumen no cambia su densidad, es decir  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , por lo que en este caso de sistema incompresible la ecuación de continuidad de la masa queda  $\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  y como la densidad, aunque sea función de punto, es en general definida positiva resulta  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , el campo de velocidad es necesariamente de divergencia nula y se dice que es solenoidal. Las líneas del campo de velocidad o bien se cierran sobre ellas mismas o su origen y al final tiene lugar sobre la superficie del contorno del medio continuo.

Si la evolución es estacionaria,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  no es función explícita de  $t$  y la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

en la que la evolución no es necesariamente solenoidal, puesto que en general la densidad no tiene que ser independiente del punto, por ejemplo en un gas.

Esto último porque el volumen de integración  $V_0, V_0 \subset \Omega$ , es arbitrario. La **ecuación de continuidad** en [1], expresa una ley de conservación en forma matemática y es una herramienta muy útil para el análisis de fluidos que se transportan a través de tubos o ductos con diámetro variable. En estos casos, la velocidad del flujo cambia debido a que el área transversal varía de una sección del ducto a otra.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho v v \cdot n d\theta\Omega = \int_{\partial\Omega} \tau \cdot n d\theta\Omega + \int_{\Omega} \rho f d\Omega \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v v) = \rho f + \nabla \cdot \tau.$$

Ecuación de cantidad de movimiento en [1], forma integral y diferencial.

De lo anterior se puede decir que la suma de las cantidades de movimiento de un sistema aislado de dos cuerpos que ejercen fuerzas entre sí, es constante, independientemente de la forma en que se sumen las fuerzas. A esto se le llama **el principio de la conservación de la cantidad de movimiento**.

La ley **de conservación de la energía** constituye el primer principio de la termodinámica y afirma que la cantidad total de energía en cualquier sistema aislado (sin interacción con ningún otro sistema) permanece invariable con el tiempo, aunque dicha energía puede transformarse en otra forma de energía. En resumen, la ley de la conservación de la energía afirma que la energía no puede crearse ni destruirse, sólo se puede cambiar de una forma a otra, por ejemplo, cuando la energía eléctrica se transforma en energía calorífica.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) v \cdot n d\theta\Omega = \int_{\partial\Omega} n \cdot \tau \cdot v d\theta\Omega + \int_{\Omega} \rho f \cdot v d\Omega - \int_{\partial\Omega} q \cdot n d\theta\Omega \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot (p v) + \nabla \cdot (\tau' \cdot v) + \rho f \cdot v + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

Ecuación de la energía en [7], forma integral y diferencial.

En la mayoría de los casos no se dispone de una solución general para este conjunto de ecuaciones, y salvo cierto tipo de fluidos y situaciones muy concretas no es posible hallar una solución analítica; por lo que en muchas ocasiones hemos de recurrir al análisis numérico para determinar una solución.

## 2.9. Ecuaciones de Navier-Stokes en variables primitivas.

El movimiento de un fluido newtoniano puede ser descrito mediante las ecuaciones de Navier-Stokes que son una combinación de ecuaciones de continuidad para la masa y ecuaciones no-lineales de transporte para la conservación del momento [33]. La solución del conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas no-lineales representa un gran

problema desde el punto de vista computacional y el interés en determinar las soluciones merece atención debido a la cantidad de aplicaciones técnicas. En este trabajo, se hará uso de la formulación función corriente-vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes y las solucionaremos para el caso no estacionario de un fluido viscoso,<sup>1</sup> incompresible e isotérmico con geometría bidimensional. Para determinar la solución numérica se considera el método de diferencias finitas en [16], [17] y [22] para discretizar y solucionar las ecuaciones diferenciales parciales acopladas al sistema.

Tanto en estudios del Océano como en Meteorología, una de las principales variables de estudio, y que posteriormente condicionan todas las demás, es la velocidad del viento (para Meteorología) o del agua del océano (para Oceanografía) en cada punto del espacio que ocupe nuestro estudio. En realidad conceptualmente no existen grandes diferencias entre el comportamiento del Océano y la Atmósfera [20]. Ambos se consideran fluidos, y todos los fluidos vienen gobernados por unas ecuaciones matemáticas: las ecuaciones de Navier-Stokes. En un modelo matemático de Atmósfera-Océano acoplado solamente resalta la diferencia en densidad ya que el agua es un fluido mucho más denso que el aire de la Atmósfera (la densidad del agua es aproximadamente  $10^3$  veces mayor que la del aire esto es:  $\frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aire}}} = 10^3$ ).

Habría que señalar sin embargo que, si bien todos los fluidos se podrían estudiar de forma similar desde el punto de vista matemático, un fluido con una viscosidad pequeña presenta serias dificultades. Para empezar, debido a su naturaleza, los fluidos con viscosidad pequeña presentan en su comportamiento gran cantidad de pequeños remolinos o vórtices (que cualquiera de nosotros puede observar en cualquier río, en cualquier esquina de la calle en días de viento, etc.) [7]. Cuanto más aparezcan este tipo de estructuras, más complejo de estudiar se vuelve el sistema. Si un fluido presenta demasiados, entonces el fluido presenta un comportamiento caótico, y si este es el caso, su estudio se complica de manera espectacular. El caso de la atmósfera es un ejemplo de fluido que presenta un comportamiento caótico [20], de ahí que las predicciones meteorológicas que se realizan hoy día tengan una fiabilidad muy baja a partir del tercer día.

El océano es un fluido más viscoso que el aire de la atmósfera [20]. Si bien su estructura también se clasifica como caótica por muchos expertos, es justo decir que es menos caótica que fluidos como el de la atmósfera. Una de las simplificaciones más importantes que se suele hacer es considerar que el fluido es incompresible. Esto reduce las ecuaciones de estudio. En concreto, las ecuaciones matemáticas que gobiernan fluidos incompresibles (ecuaciones de Navier-Stokes) son las siguientes.

El movimiento de los fluidos Newtonianos queda totalmente descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes. En la formulación de variables primitivas la forma explícita de la ecuación es:

---

<sup>1</sup> En los fluidos Newtonianos la viscosidad es constante, esto es, no depende ni de la presión ni de la temperatura, lo cual nos permite tener expresiones sencillas para las condiciones de frontera.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{1}{Re}\right) \Delta u \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{1}{Re}\right) \Delta v \quad (2.14)$$

donde  $u$  y  $v$  son las velocidades a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente,  $t$  es el tiempo,  $Re$  es el número de Reynolds,  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $p$  es la presión que actúa sobre el fluido [32] y [33].

Aquí nos encontramos con las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, no estacionarias en 2D en la tradicional formulación de variables primitivas donde  $u$  y  $v$  son las velocidades a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente,  $t$  es el tiempo,  $Re$  es el número de Reynolds,  $\mu$  representa la viscosidad del fluido y  $p$  es la presión.

Esta formulación representa el fenómeno del flujo aunque su solución es normalmente difícil de obtener, debido al término de la presión en (2.13) y (2.14) y la condición de incompresibilidad (2.1).

A fin de evitar el manejo de la variable *presión*, y satisfacer la condición de incompresibilidad, se utiliza para las ecuaciones de Navier-Stokes una formulación alternativa conocida como Función Corriente-Vorticidad.

En (2.1 se muestra la condición de incompresibilidad que ha sustituido a la ecuación de continuidad en (2. con la densidad constante en tiempo y espacio.

En aquellos sistemas fluidos bidimensionales, incompresibles y estacionarios, en los que dada la simetría del problema la velocidad solamente tiene dos componentes  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  la ecuación de continuidad se escribe en (2.12).

La condición de divergencia nula  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  se obtiene de la hipótesis de incompresibilidad del fluido. Físicamente expresa que las deformaciones que puedan presentar distintas regiones del fluido, nunca pierden ni ganan volumen, sólo modifican su forma.

Las siguientes expresiones  $\frac{Dx}{Dt}$  y  $\frac{Dy}{Dt}$  corresponden con la variación a lo largo del tiempo de cualquier región del fluido. Para hacernos una idea, nos daría información de cómo una región va variando su forma dependiendo del propio movimiento del fluido.

Los términos  $\left(\frac{1}{Re}\right) \cdot l$  y  $\left(\frac{1}{Re}\right) \cdot l$  representan la viscosidad del fluido, que está dada por el escalar  $\left(\frac{1}{Re}\right)$ . Cuanto mayor sea esta cantidad, más viscoso será nuestro fluido, y por tanto, presentará mayor resistencia a fluir.

En los fluidos intervienen otro tipo de fuerzas que son las denominadas por gradiente de presión (alrededor del ala el gradiente de presión, combinado con la velocidad, ambos aspectos aparecen en la ecuación de momento, y son los responsables de que un ave o un avión sean capaces de volar). Éstas son las responsables de que el fluido se mueva hacia regiones donde la presión sea más baja, buscando así un estado de reposo.

## 2.10. Formulación función corriente-vorticidad

Se han propuesto varios esquemas para dar una solución a las ecuaciones de Navier-Stokes, en variables primitivas y en formulación función corriente vorticidad, aunque estos últimos, particularmente fluidos viscosos e incompresibles gobernados por las ecuaciones mencionadas anteriormente se han vuelto muy populares debido a las ventajas asociadas a este tipo de problemas

En dos dimensiones las ecuaciones de Navier-Stokes se expresan a menudo utilizando la formulación función corriente  $\psi$  y la vorticidad  $\omega$  en lugar de las variables primitivas. En esta representación la determinación de la vorticidad y la función corriente resulta independiente de la presión  $p$  lo cual reduce notablemente el esfuerzo de cómputo [34], [35] y [36].

A continuación se describe brevemente la deducción de las ecuaciones para la función corriente y la vorticidad.

La función corriente se define como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.15)$$

En donde  $u$  representa la velocidad a lo largo del eje  $x$ , y  $v$  es la velocidad a lo largo del eje  $y$ . La forma en que esta definida  $\psi$  hace que necesariamente se satisfaga la ecuación de la continuidad (2.9). Además es fácil verificar que:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\psi = 0$$

Que implica que la velocidad  $\mathbf{V} = (u, v)$  es tangente a las líneas de corriente (también llamadas líneas de contorno). La vorticidad por otro lado, se define como el rotacional del campo de velocidades y, en el caso bidimensional, se obtiene:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.16)$$

La Formulación función Corriente-Vorticidad queda descrita a continuación:

$$\omega_t - \frac{1}{Re}(\omega_{xx} + \omega_{yy}) + (u\omega_x + v\omega_y) = 0 \quad (2.17)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega(x, y). \quad (2.18)$$

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \omega = u_y - v_x. \quad (2.19)$$

al aplicar el rotacional en la ecuación del momento en variables primitivas (2.13), se obtiene el parámetro de la *viscosidad*, que esta dado por  $\nu = \frac{1}{Re}$ , donde  $Re$  denota el número de Reynolds, si  $\nu = 0$  se tienen las ecuaciones de Euler para fluidos ideales incompresibles.

Las expresiones anteriores, no lineales, forman un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas equivalentes a las ecuaciones originales en donde se satisface automáticamente la ecuación de la compresibilidad (2.12). Esta formulación es particularmente conveniente para algunos cálculos pues tanto la vorticidad  $\omega$  como la función corriente  $\psi$  están desacoplados de la variable presión  $p$ . Así cuando se desea calcular la velocidad por medio de la vorticidad  $\omega$  y de la función corriente  $\psi$  no es necesario conocer de forma explícita, la de presión  $p$  en el fluido. Además, el uso de  $\omega$  y  $\psi$  es mas eficiente que la formulación original que utiliza las variables primitivas  $(u, v, p)$ , ya que al introducir la función corriente  $\psi$  se elimina la solución explícita de la ecuación de continuidad y por lo tanto el problema contiene solo dos incógnitas ( $\psi$  y  $\omega$ ) en vez de las tres originales  $(u, v, p)$  Aunque el planteamiento del problema en la formulación función corriente-vorticidad es muy útil ya que simplifica notoriamente el cálculo numérico, el tratamiento y obtención de las condiciones de frontera necesarias para tener el problema correctamente planteado es un poco más complicado como veremos más adelante, lo cual hace que la formulación sea mas limitada.

En el caso de querer extender la formulación función corriente-vorticidad en tres dimensiones [27] la tarea no es tan sencilla ni directa como para el caso bidimensional pues es necesario encontrar una generalización de la definición de vorticidad  $\omega$  y de función corriente  $\psi$ . Además, en tres dimensiones el procedimiento se torna más complicado desde el punto de vista computacional ya que en la formulación función corriente-vorticidad aparecen seis variables en lugar de las cuatro originales [33].

Por último, cabe mencionar que en otras referencias consultadas, se discuten otras formulaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso bidimensional tales como la de velocidad-vorticidad en donde nuevamente las ecuaciones resultantes no dependen de la presión  $p$ . [29]

Además hay que añadir que cualquier modelo de ecuaciones matemáticas debe ser estudiado en una región del espacio (o del plano, si el modelo es bidimensional). De esta

forma, y para ser matemáticamente correctos, debemos señalar explícitamente cuál es el dominio (región) de validez. Para que además podamos resolver el modelo, también es necesario conocer cómo se comporta el fluido que queremos estudiar en la frontera del dominio, esto es, se requieren las condiciones de frontera. Más adelante se considera un ejemplo para entender esto último, con el denominado problema del *vórtice de Taylor*.

## 2.11. Vorticidad

Desde el punto de vista de la física teórica, el movimiento del aire (Meteorología) y del agua (Oceanografía) representan principalmente un problema de dinámica de fluidos, que puede ser representado y analizado por la segunda ley de Newton y por las leyes de conservación de la masa y del momento angular. Como ya se había mencionado la segunda ley de Newton establece que el movimiento de un cuerpo cambia bajo la acción de una fuerza [9].

Por su parte, la ley de conservación de la masa o ecuación de continuidad, establece que el cambio en el campo de velocidad de un fluido está directamente relacionado con el cambio en la densidad del mismo fluido; finalmente, el principio de conservación de momento angular establece que el cambio en el giro de los fluidos (aire y agua) al cambiar su posición en el espacio. Este concepto es conocido como vorticidad y es la característica de los fluidos que expresa su tendencia a rotar. Estos tres principios contienen las bases de la Oceanografía y el estudio de la Atmosfera, pues con ellos se relacionan la masa, la fuerza y los cambios de velocidad ya sea en el aire o en el agua. Además se requiere de la primera ley de la termodinámica, en donde se relacionan los cambios de calor con el trabajo y la energía [20].

Tal como ya observó Leonardo da Vinci, el régimen turbulento se caracteriza por la aparición de remolinos (torbellinos) a muy diversas escalas espaciales. La aparición de estructuras “rotantes” en el seno de un campo vectorial sugiere la introducción de un operador vectorial clásico que las caracteriza: el rotacional. En el contexto de la mecánica de fluidos se define la vorticidad como la circulación por unidad de área en un punto del flujo y es un vector que juega un papel crucial. La vorticidad se define como:

$$\omega(x, t) = \nabla \times \mathbf{u}(x, t) = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

La vorticidad es un término usado en mecánica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido. Para ejemplificar se puede suponer un río en el que cada partícula y sus vecinas se mueven con una velocidad fija en una sola dirección (flujo laminar). En este caso la vorticidad del fluido es nula. Matemáticamente la vorticidad es definida como el rotor o rotacional de la velocidad.

Se habla de vorticidad ciclónica y anticiclónica, para referirse a si la orientación del giro es en el sentido de la rotación terrestre o contrario, respectivamente. El movimiento de un fluido se puede denominar solenoidal si el fluido gira en círculo o en hélice, o de forma general si tiende a rotar en torno a un eje.

Un vórtice es un flujo turbulento en rotación espiral con trayectorias de corriente cerradas. Como vórtice puede considerarse cualquier tipo de flujo circular o rotatorio que posee vorticidad

### 3. ESQUEMA NUMERICO Y RESULTADOS NUMERICOS

#### 3.1 Esquema Numérico

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N = 2,3)$  la región del fluido viscoso, incompresible e isotérmico, y  $\Gamma$  su frontera.

Para la discretización temporal se utiliza un esquema de aproximación de segundo orden:

$$f_r(\mathbf{x}, (n+1)\Delta t) = \frac{3f^{n+1} - 4f^n + f^{n-1}}{2\Delta t}, x \in \Omega \quad (3.1)$$

donde  $n \geq 1$ , y  $\Delta t$  representa el paso del tiempo y  $\omega^n \equiv \omega(\mathbf{x}, r\Delta t)$  para una función  $\omega$ . Además se sabe que (3.1) es una aproximación de segundo orden para una función  $\omega$  suficientemente suave.

Una vez que la derivada temporal de la vorticidad,  $\omega_t$  en (2.17), se aproxima con (3.1), el sistema totalmente implícito queda de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \psi^{n+1} = -\omega^{n+1} \text{ en } \Omega \\ \alpha \omega^{n+1} - \nu \Delta \omega^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \omega^{n+1} = f_\omega, n \geq 1 \text{ en } \Omega \end{array} \right. \quad (3.2)$$

donde:

$$\alpha = \frac{3}{2\Delta t}, \quad f_\omega = \frac{4\omega^n - \omega^{n-1}}{2\Delta t};$$

y  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  donde  $u_1$  y  $u_2$  son las componentes de la velocidad, en términos de  $\psi$ , están dados por (2.15). Después a cada paso de tiempo, un sistema de ecuaciones no lineal elíptico, tiene que ser resuelto como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \psi = -\omega \text{ en } \Omega, \quad \psi = 0 \text{ en } \Gamma; \\ \alpha \omega - \nu \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = f_\omega \text{ en } \Omega, \quad \omega = \omega_{ef} \text{ en } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Para obtener  $(\psi^1, \omega^1)$  en (3.2) cualquier método de segundo orden usando una combinación de un paso puede ser aplicada a sistemas estacionarios (donde la velocidad del fluido en un punto es constante con el tiempo), así utilizando la forma (3.3).

El método a utilizar es el método de iteración de punto fijo aplicado a un sistema de ecuaciones no lineales elíptico que resulta después de realizar la discretización de segundo orden en el tiempo. Este método iterativo nos lleva a la solución de problemas elípticos lineales, simétricos, bien condicionados y desacoplados.

Sea:

$$R_\omega(\omega, \psi) \equiv \alpha \omega - \nu \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - f_\omega \text{ en } \Omega.$$

Y los siguientes sistemas

$$\Delta\psi = -\omega \text{ en } \Omega, \psi = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (3.4)$$

$$R_\omega(\omega, \psi) = 0 \text{ en } \Omega, \omega = \omega_{cf} \text{ sobre } \Gamma$$

donde  $\omega$  denota las condiciones de frontera para  $\omega$ . Se resuelve en el tiempo (n+1), mediante el proceso iterativo de punto fijo con  $w^0 = w^n$  dados, hasta que sea convergente en  $w$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\psi^{m+1} = -\omega^m \text{ en } \Omega, \quad \psi^{m+1} = 0 \text{ sobre } \Gamma; \\ \omega^{m+1} = \omega^m - \rho_\omega (\alpha I - \nu\Delta)^{-1} R_\omega(\omega^m, \psi^{m+1}) \text{ en } \Omega \\ \omega^{m+1} = \omega_{cf}^{m+1} \text{ sobre } \Gamma, \rho_\omega > 0. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Finalmente el sistema (3.5) es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\psi^{m+1} = -\omega^m \text{ en } \Omega, \psi^{m+1} = 0 \text{ sobre } \Gamma; \\ (\alpha I - \nu\Delta)\omega^{m+1} = (\alpha I - \nu\Delta)\omega^m - \rho_\omega R_\omega(\omega^m, \psi^{m+1}) \text{ en } \Omega, \rho_\omega > 0, \\ \omega^{m+1} = \omega_{cf} \text{ en } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Es sabido que para la discretización espacial de problemas elípticos como estos (3.6) pueden ser utilizados métodos como diferencias finitas o elementos finitos, siempre y cuando se trabaje con dominios rectangulares, además es también sabido que existen programas dedicados a resolver este tipo de problemas de manera eficiente, ejemplo de esto es el programa que se utilizó Fishpack [5] donde los sistemas lineales elípticos son resueltos mediante un método de reducción cíclica iterativo. También sabemos que si trabajamos con elementos finitos todas las discretizaciones espaciales de segundo orden pueden ser obtenidas mediante un método de elementos finitos lineales, como el reportado en [18].

Observación: a diferencia de este esquema, el problema del Vórtice de Taylor no se pudo resolver numéricamente en su totalidad, solamente el problema elíptico para la función Corriente (3.5) usando en su lado derecho, la Vorticidad  $\omega$  que se obtiene a partir de la solución analítica en el correspondiente nivel de tiempo, y en consecuencia no se itera (en un trabajo futuro se tratará de resolver esta dificultad).

A continuación se presentaran los problemas prueba utilizados para la comprobación de los resultados numéricos obtenidos.

### 3.2 Vórtice de Taylor

En este problema se describe la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones para el caso de un fluido no estacionario (el tiempo  $t$  aparece explícitamente), incompresible e isotérmico. El método desarrollado para determinar la solución se basa en el uso de la técnica conocida como diferencias finitas para la discretización de las ecuaciones diferenciales. Se considera, como aplicación, el problema del vórtice de Taylor, en dicho ejemplo tenemos un fluido delimitado por su frontera. La solución explicita del problema se considera en la representación función corriente-vorticidad [17], [25] y [26].

Para poder mostrar la manera en que se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes en la formulación función corriente-vorticidad se considera el caso de un fluido no-estacionario, viscoso, incompresible e isotérmico.

Primero consideraremos el problema del vórtice de Taylor [19] gobernado por las ecuaciones [2.12-2.14] en la región  $0 \leq x, y \leq 2\pi$ . La solución exacta de este problema esta dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\text{Cos}(x) \cdot \text{Sen}(y) \cdot e^{-\frac{2t}{Re}} \\ v(x, y, t) &= \text{Sen}(x) \cdot \text{Cos}(y) \cdot e^{-\frac{2t}{Re}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Las siguientes son las condiciones iniciales en la formulación de variables primitivas.

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= -\text{Cos}(x) \cdot \text{Sen}(y) \\ v(x, y, 0) &= \text{Sen}(x) \cdot \text{Cos}(y) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para poder obtener las condiciones iniciales en la Formulación función corriente-vorticidad en el problema del vórtice de Taylor es necesario tomar las condiciones en (3.8) y a partir de ellas derivar tomando en cuenta las ecuaciones en (2.19) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} u = \psi_y, \quad \Rightarrow \quad \psi &= \text{Cos}(x) \cdot \text{Cos}(y) + k_1 \\ v = -\psi_x, \quad \Rightarrow \quad \psi &= \text{Cos}(y) \cdot \text{Cos}(x) + k_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes que pueden ser tomadas como cero.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = u_y - v_x \\ u_y = -\cos(x) \cdot \cos(y), \quad v_x = \cos(x) \cdot \cos(y) \\ \omega = -2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Ahora se obtendrán las condiciones de frontera para el Vórtice de Taylor en Formulación función Corriente-Vorticidad a partir de las condiciones de frontera en la formulación de variables primitivas.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, y, t) = -\text{Sen}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}}, \quad u(2\pi, y, t) = -\text{Sen}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ v(0, y, t) = 0, \quad v(2\pi, y, t) = 0 \end{array} \right. \quad \forall t \geq 0, \text{ Periódica en } x.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 2\pi, t) = 0 \\ v(x, 0, t) = \text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}}, \quad v(x, 2\pi, t) = \text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \end{array} \right. \quad \forall t \geq 0, \text{ Periódica en } y.$$

A continuación aparecen las condiciones de Frontera del problema en su formulación función Corriente-Vorticidad que es la utilizada para resolver el problema. Las condiciones de Frontera de la función Corriente son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_y = u \\ \psi_y(0, y, t) = 0 \Rightarrow \psi_y(0, y, t) = c_1 \\ \psi_y(2\pi, y, t) = 0 \Rightarrow \psi_y(2\pi, y, t) = c_2 \end{array} \right.$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes y si  $c_1 = c_2 \Rightarrow \psi(0, y, t) = \psi(2\pi, y, t) \cdot \forall t \geq 0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_x = -v \\ \psi_x(x, 0, t) = -\text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \Rightarrow \psi(x, 0, t) = -\int \text{Sen}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} dx + k_1(t) \\ \psi(x, 0, t) = \text{Cos}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} + k_1(t) \\ \psi_x(x, 2\pi, t) = -\text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \Rightarrow \psi(x, 2\pi, t) = -\int \text{Sen}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} dx + k_2(t) \\ \psi(x, 2\pi, t) = \text{Cos}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} + k_2(t) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

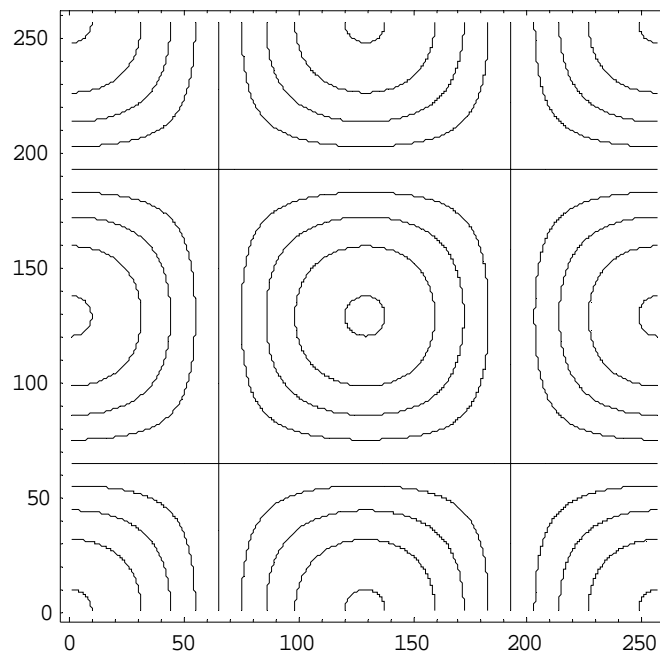
donde  $k_1(t)$  y  $k_2(t)$  son constantes y además se tiene que si se cumple la siguiente igualdad  $k_1(t) = k_2(t)$ ,  $\Rightarrow \psi(x, 0, t) = \psi(x, 2\pi, t)$ .  $\Psi$  es periódica en  $x$  y  $y$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Las condiciones de Frontera de la función Vorticidad se obtienen de (2.19) y son:

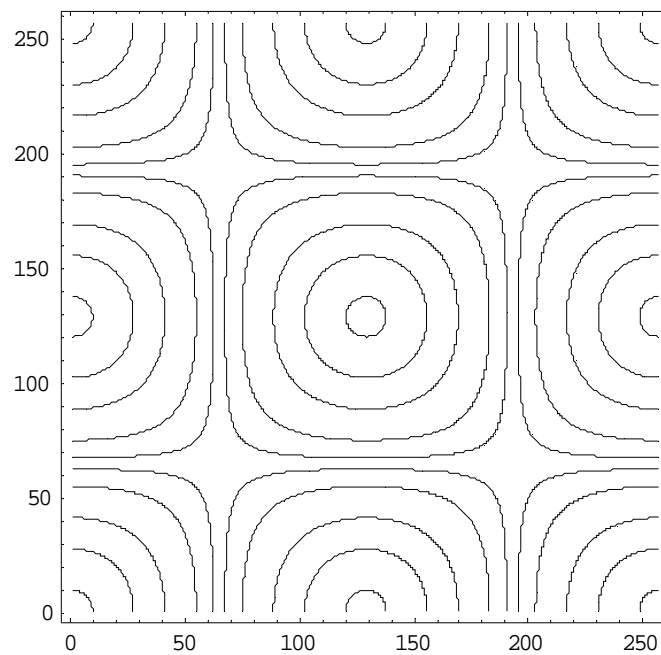
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(0, y, t) = 2 \cdot \text{Cos}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ \omega(2\pi, y, t) = 2 \cdot \text{Cos}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ \omega(x, 0, t) = 2 \cdot \text{Cos}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ \omega(x, 2\pi, t) = 2 \cdot \text{Cos}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

### 3.3. Graficas de la solución.

Ahora veremos las graficas resultantes de la solución analítica y de la solución numérica utilizando variaciones importantes en el número de Reynolds  $Re$ , y en el tiempo  $t$ .

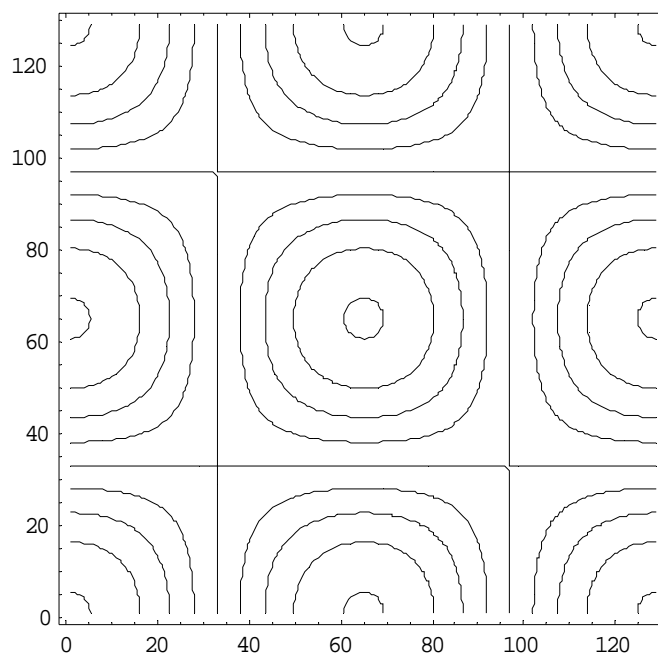


**Figura 3.1.** Solución analítica. Líneas de Corriente de la Función Corriente  $Re = 100$  y  $t = 10$

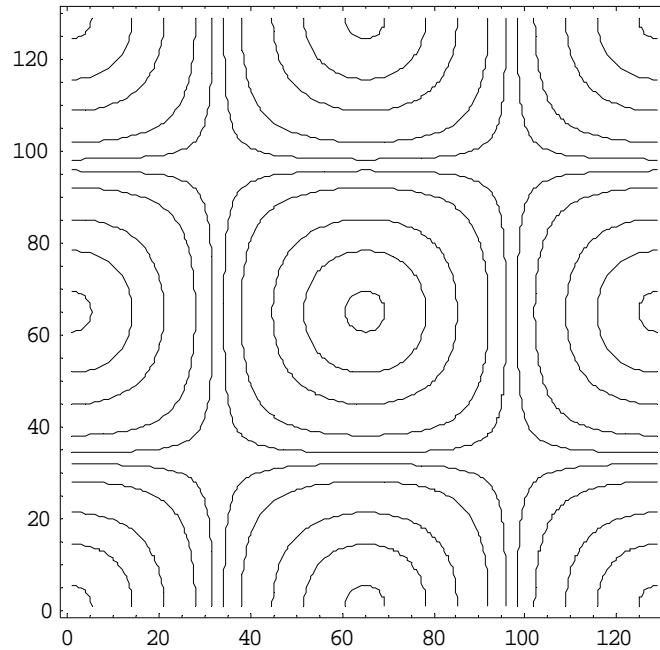


**Figura 3.2.** Solución analítica. Isocontornos de la Función Vorticidad  $Re = 100$  y  $t = 10$

Estas graficas representan la solución analítica del problema en cuestión.

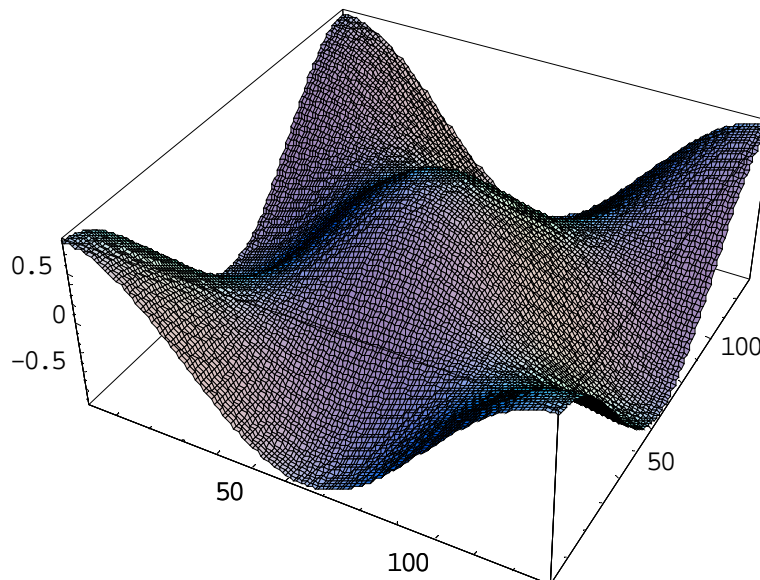


**Figura 3.3.** Solución numérica. Líneas de Corriente de la Función Corriente  $Re = 100$  y  $t = 10$

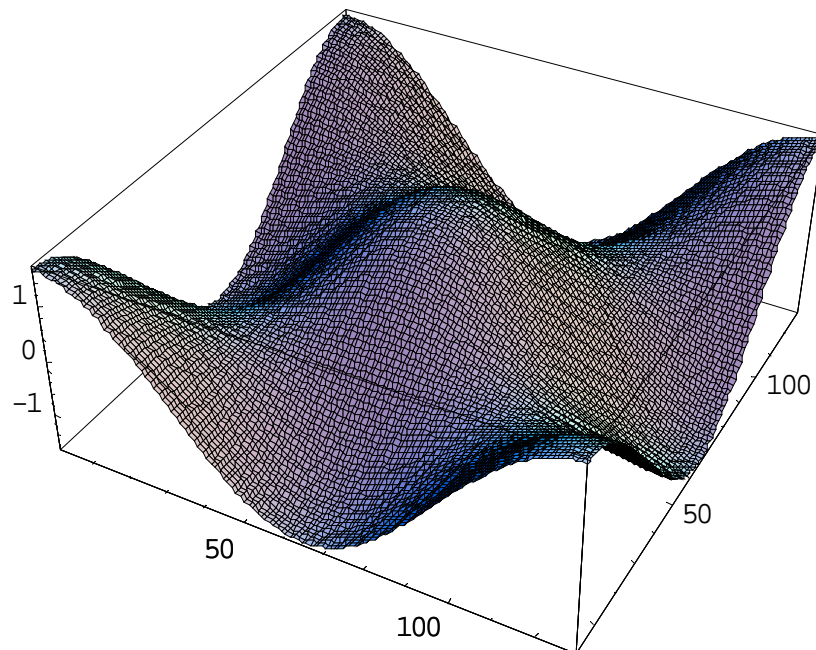


**Figura 3.4.** Solución numérica. Isocontornos de la Función Vorticidad  $Re = 100$  y  $t = 10$

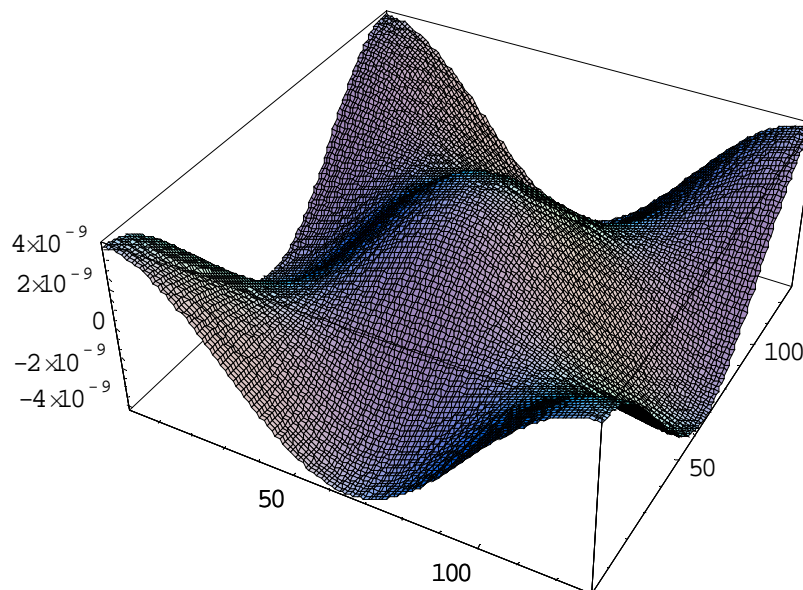
Aquí podemos apreciar la solución numérica obtenida a partir de nuestro programa, se puede apreciar fácilmente que son muy similares a las de la solución analítica. A partir de este momento se omitirán las gráficas que muestran las líneas de corriente y vorticidad como las mostradas anteriormente y en su lugar se colocarán graficas en 3D que muestran el desempeño del fluido a lo largo del tiempo y con cambios importantes en el número de Reynolds.



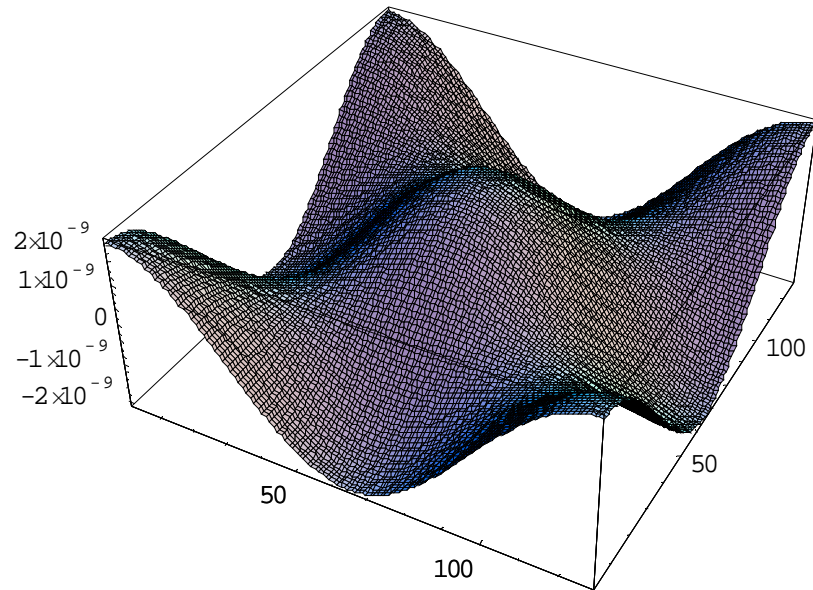
**Figura 3.5.** Líneas de Corriente de la Función Corriente  $Re = 100$  y  $t = 10$



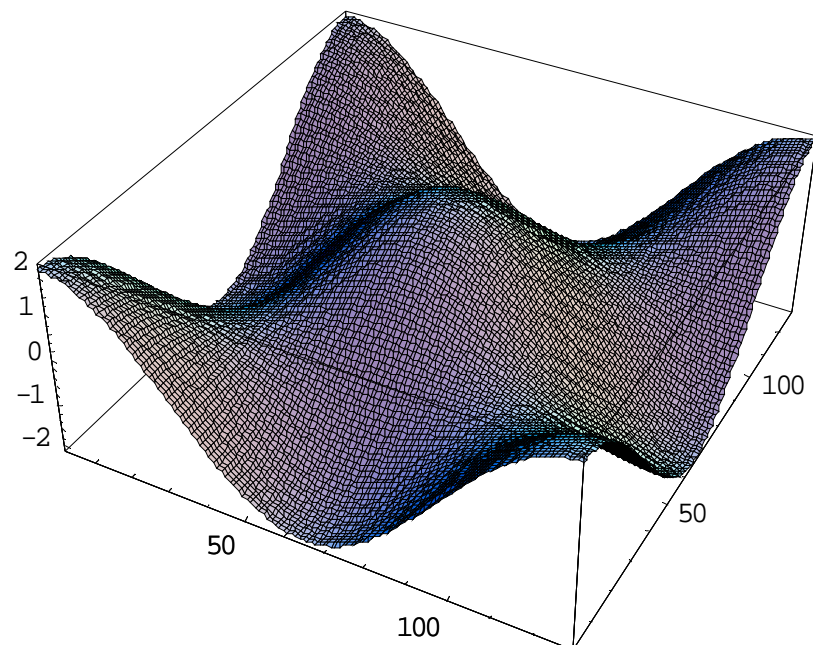
**Figura 3.6.** Isocontornos de la Función Vorticidad  $Re = 100$  y  $t = 10$



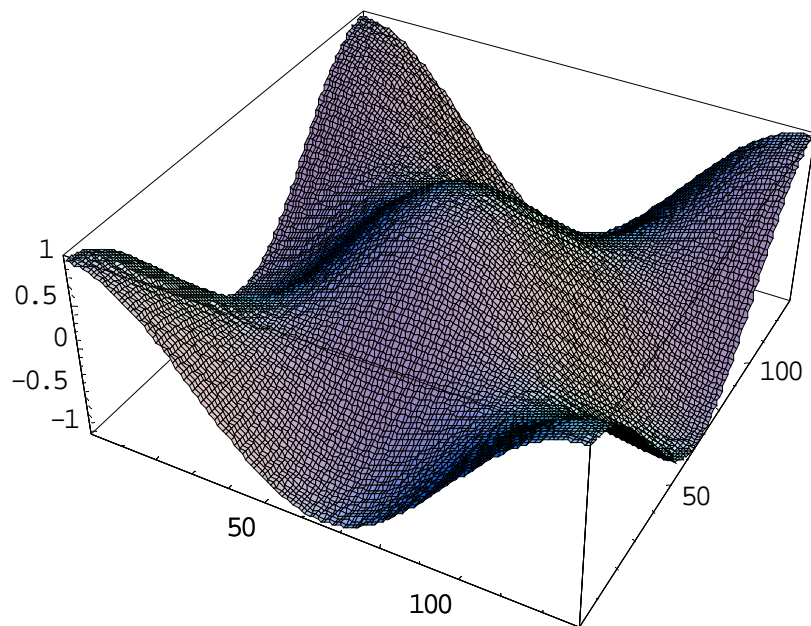
**Figura 3.7.** Isocontornos de la Función Vorticidad  $Re = 100$  y  $t = 1000$



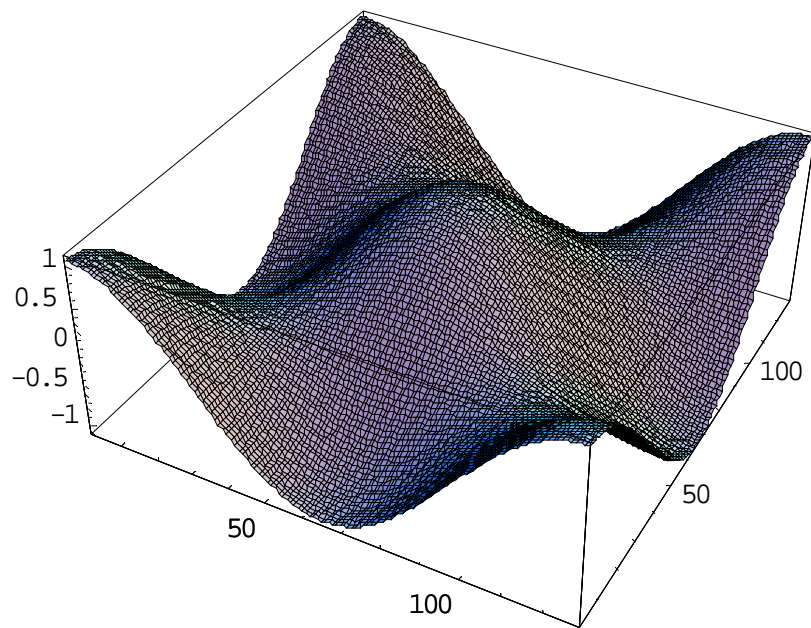
**Figura 3.8.** Líneas de Corriente de la Función Corriente  $Re = 100$  y  $t = 1000$



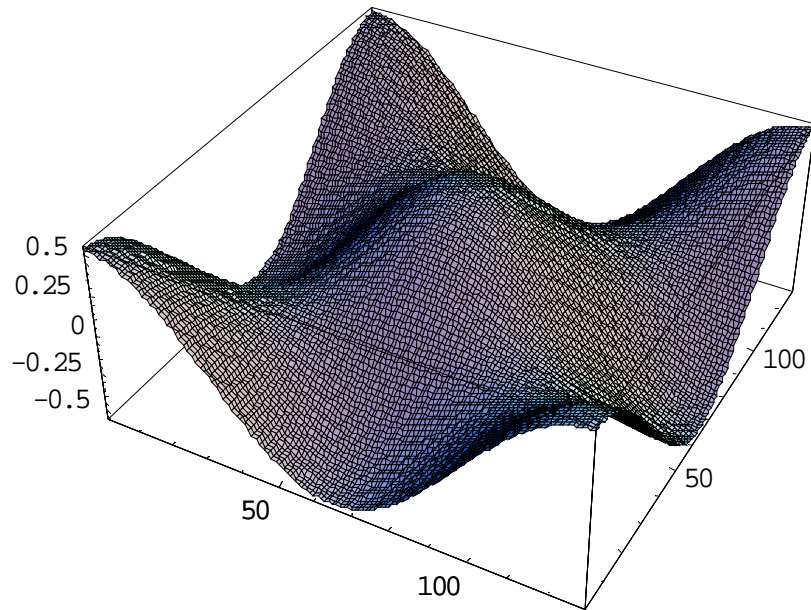
**Figura 3.9.** Isocontornos de la Función vorticidad  $Re = 3200$  y  $t = 10$



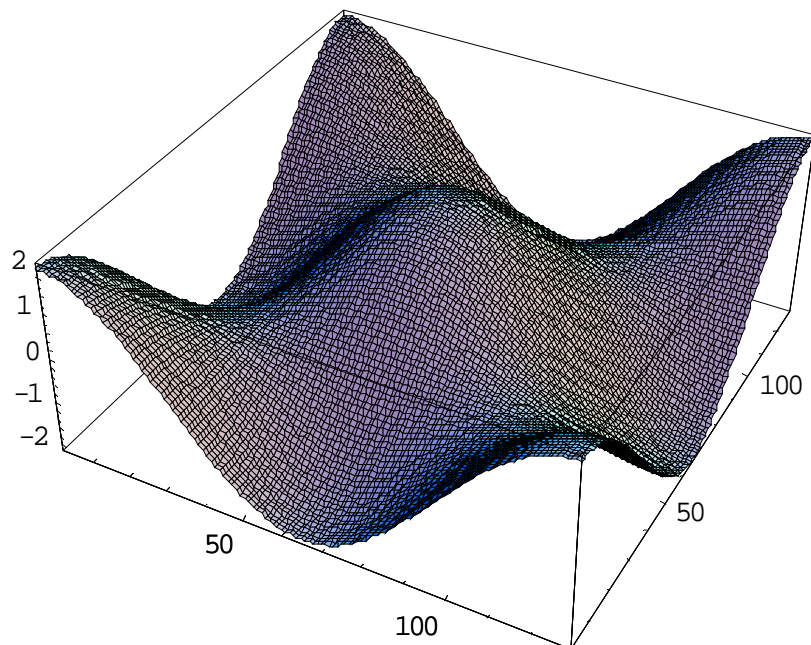
**Figura 3.10.** Líneas de Corriente de la Función corriente  $Re = 3200$  y  $t = 10$



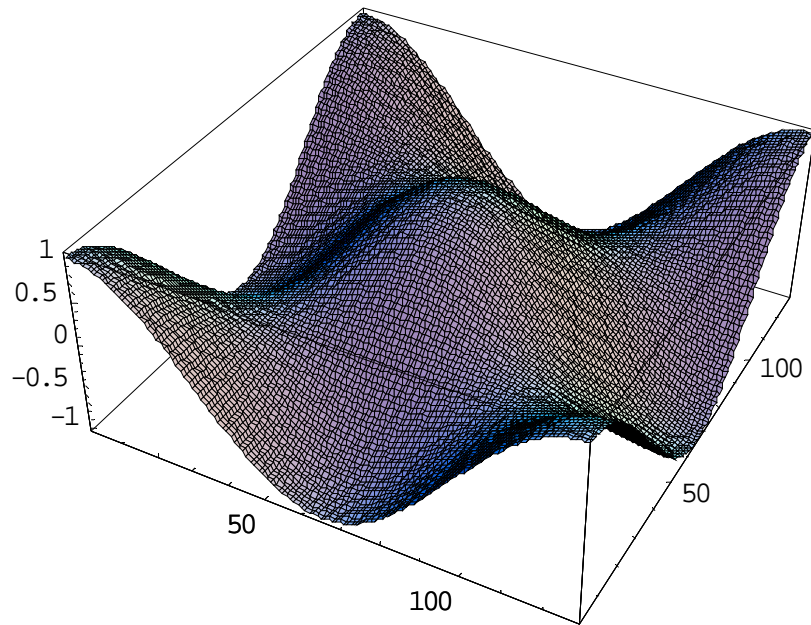
**Figura 3.11.** Isocontornos de la Función vorticidad  $Re = 3200$  y  $t = 1000$



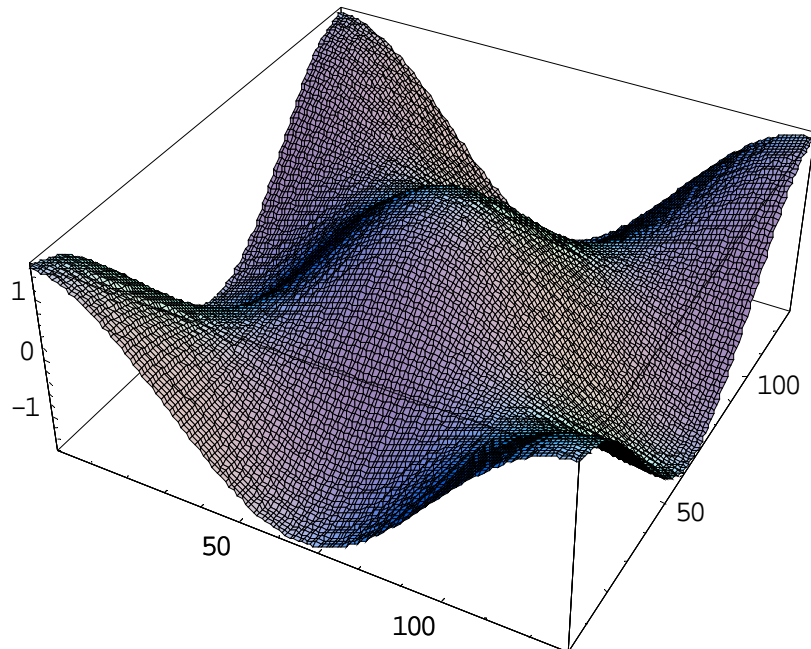
**Figura 3.12.** Líneas de Corriente de la Función corriente  $Re = 3200$  y  $t = 1000$



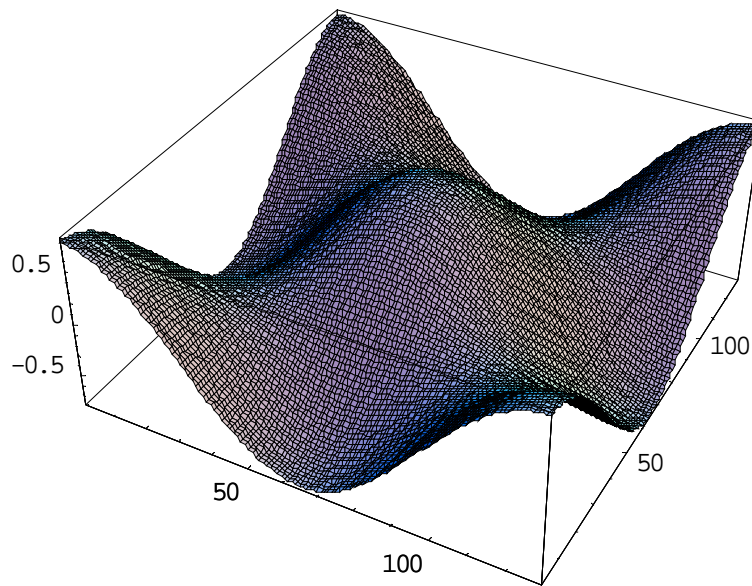
**Figura 3.13.** Isocontornos de la Función vorticidad  $Re = 7500$  y  $t = 10$



**Figura 3.14.** Líneas de Corriente de la Función corriente  $Re = 7500$  y  $t=10$



**Figura 3.15.** Isocontornos de la Función vorticidad  $Re = 7500$  y  $t=1000$



**Figura 3.16.** Líneas de Corriente de la Función corriente  $Re = 7500$  y  $t = 1000$

Aquí se muestra de forma clara puntos mínimos y máximos de las graficas obtenidas mediante el análisis numérico y analítico llevado a cabo. En estas tablas están presentes los distintos parámetros de viscosidad representados por el número de Reynolds con diferentes variaciones en el tiempo.

**Tabla 3.1:** Solución exacta valores mínimos y máximos del Vórtice de Taylor

Reynolds	Tiempo	Función Corriente	
		Min.	Max.
100	10	-0.818730753055888	0.818730753077982
100	1000	-2.061153622382938E-009	2.061153622438558E-009
3200	10	-0.993769490596578	0.993769490623395
3200	1000	-0.535261428504546	0.535261428518990
7500	10	-0.997336885703588	0.997336885730501
7500	1000	-0.765928338343980	0.765928338364649

**Tabla 3.2:** Solución Numérica valores mínimos y máximos del Vórtice de Taylor

Reynolds	Tiempo	Función Corriente	
		Min.	Max.
100	10	-0.8187307530	0.818730760
100	1000	-2.061153623072801E-009	2.061153640977130E-009
3200	10	-0.993769491	0.993769499
3200	1000	-0.535261428510145	0.535261433159724
7500	10	-0.997336885	0.997336894
7500	1000	-0.765928338347398	0.765928345000678

**Tabla 3.3:** Porcentaje de error

Reynolds	Tiempo	Error Relativo
100	10	3.207252399142954e-008
100	1000	3.192999914807766e-008
3200	10	3.190903024944430e-008
3200	1000	3.167780632146758e-008
7500	10	3.166967169761883e-008
7500	1000	3.167314295814883e-008

En estos análisis se han despreciado los valores para la función Vorticidad ya que la diferencia obtenida es de cero debido a que dicha función se obtiene a partir de la solución analítica, y por lo tanto no se toma en cuenta.

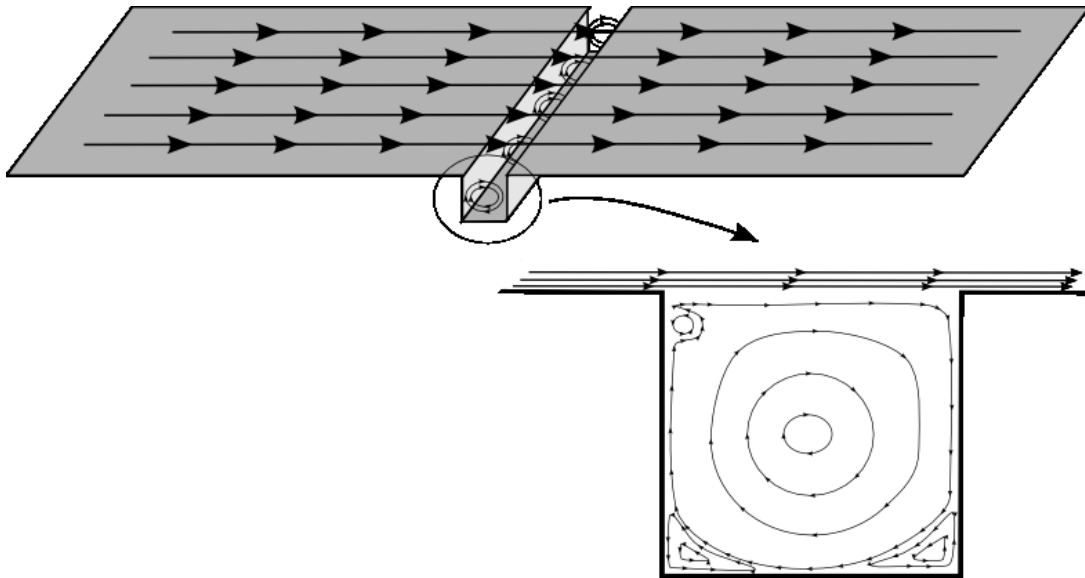
Debido a que el error es menor al 1% y a las comparaciones realizadas con otros autores [17], [19], [22], [23] y [38]. Se considera buena a la solución.

### 3.4. El problema de la cavidad cuadrada

A continuación estudiaremos otro problema más, llamado el problema de la cavidad cuadrada, uno de los más estudiados desde el punto de vista matemático, porque origina el problema de recirculación.

En el problema de la cavidad en [22] se pretende estudiar un fluido líquido dentro de una cavidad similar a la de la figura. Como se observa, se supone que tenemos un fluido moviéndose de izquierda a derecha en un canal homogéneo, el cual presenta una pequeña hendidura o cavidad cuadrada. Si pretendemos saber que ocurre, cómo se mueve el fluido dentro de esta cavidad, tenemos que intentar resolver las ecuaciones de Navier-Stokes dentro de este dominio.

Una de las simplificaciones que se suele hacer para estudiar este modelo concreto es suponer que el fluido tiene una estructura bidimensional. De esta forma, las ecuaciones de Navier-Stokes se plantean sobre un conjunto del plano que represente un cuadrado, normalmente el conjunto que se suele tomar es  $[0,1] \times [0,1]$ , el cuadrado unidad.



**Figura 3.17.** Representación del problema de la cavidad cuadrada.

Como ya se había mencionado con anterioridad, también es necesario decir al modelo cómo se comporta el fluido en la frontera del dominio (la región de estudio). En este caso concreto, tenemos que saber cómo se mueve el fluido en la parte superior, inferior y los laterales del cuadrado. Si uno analiza un poco lo que está ocurriendo en este ejemplo, es fácil darse cuenta de que el fluido está en reposo en las paredes laterales e inferior del cuadrado por viscosidad no hay deslizamiento en paredes sólidas y fijas, mientras que en la parte superior del mismo el fluido se mueve de izquierda a derecha (pared en movimiento), empujado por lo que ocurre en el resto del canal.

Resumiendo, si queremos describir de forma completa el estudio de este problema, debemos indicar todo lo comentado. El resultado sería que tendríamos que resolver el siguiente conjunto de ecuaciones:

Este problema de la cavidad cuadrada se define de la siguiente forma:

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$$

Aquí  $\Omega$  representa la región de estudio para nuestro fluido y las condiciones de frontera están dadas por  $u = g$  sobre  $\Gamma$ , con

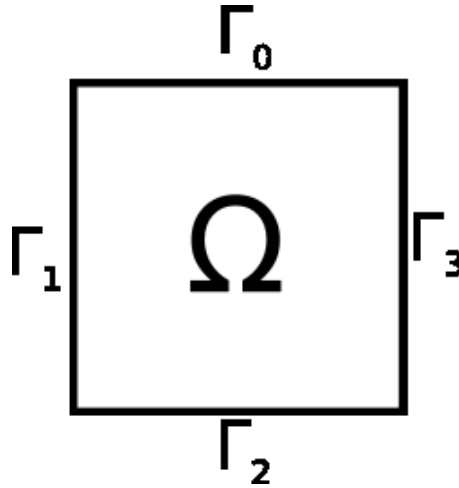
$$g = \begin{cases} (1,0) \text{ sobre } \Gamma_0 = \{(x,1): 0 < x < 1\}, t > 0, \\ (0,0) \text{ sobre } \Gamma - \Gamma_0, t > 0, \end{cases}$$

en donde  $\Gamma$  es la frontera de  $\Omega$ .

La condición inicial:

$$(u(x, y, 0), v(x, y, 0)) = (0, 0) \text{ para todo } (x, y) \in \Omega,$$

debe satisfacer la condición de frontera.

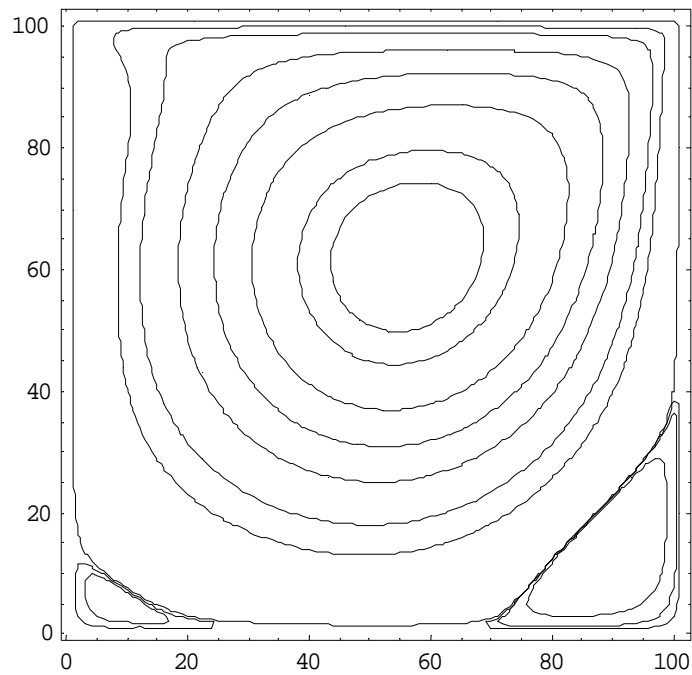


**Figura 3.18.** Región de estudio  $\Omega$  y frontera  $\Gamma$  (la cual en este caso consiste de varias partes disjuntas, como conjuntos abiertos).

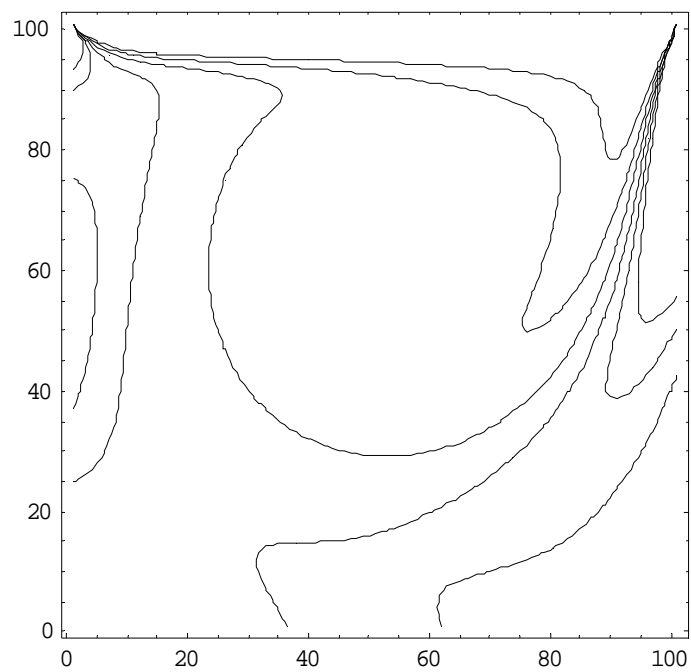
### 3.5. Graficas de la solución para el problema de la Cavity Cuadrada

A continuación se presentan graficas de los resultados obtenidos con números de Reynolds diferentes.

En los siguientes experimentos se utiliza  $\Delta t = 0.01$  para números de Reynolds que van desde  $Re = 400$  hasta  $Re = 7500$ ; donde  $h$  representa el tamaño de paso en la malla.

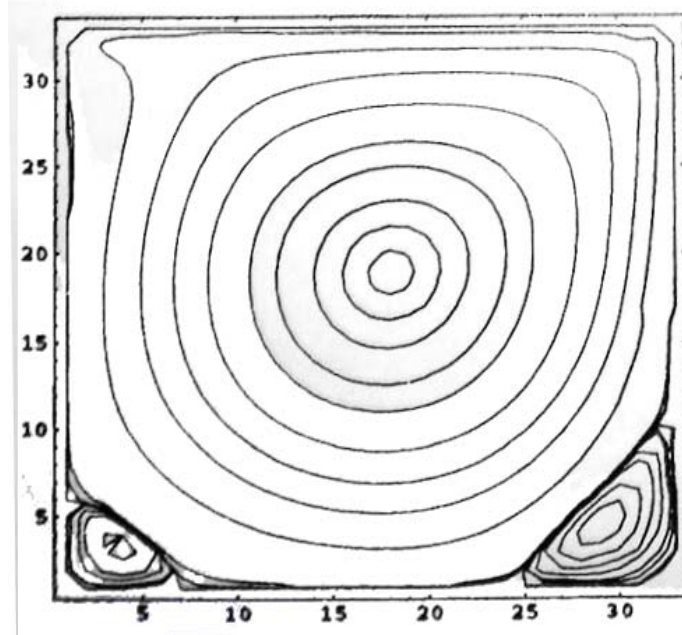


**Figura 3.19.** Líneas de Corriente de la Función Corriente para  $Re = 400$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/100$ .

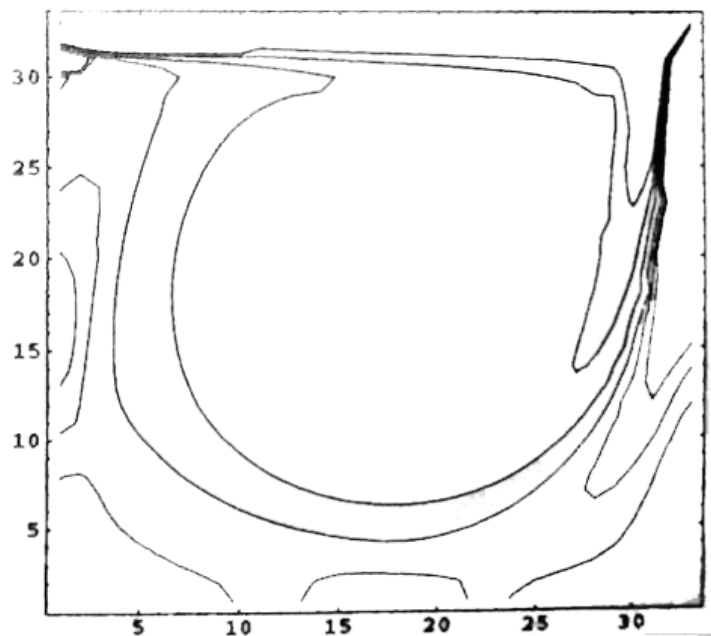


**Figura 3.20.** Isocontornos de la Función Vorticidad para  $Re = 400$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/100$ .

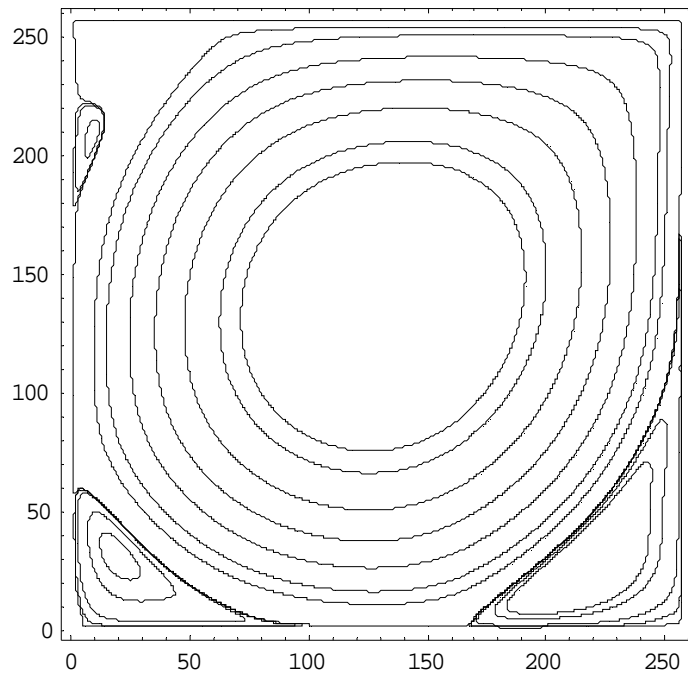
Las siguientes figuras muestran los contornos de la vorticidad y las líneas de corriente para números de Reynolds  $Re = 1000$  con  $h = 1/32$



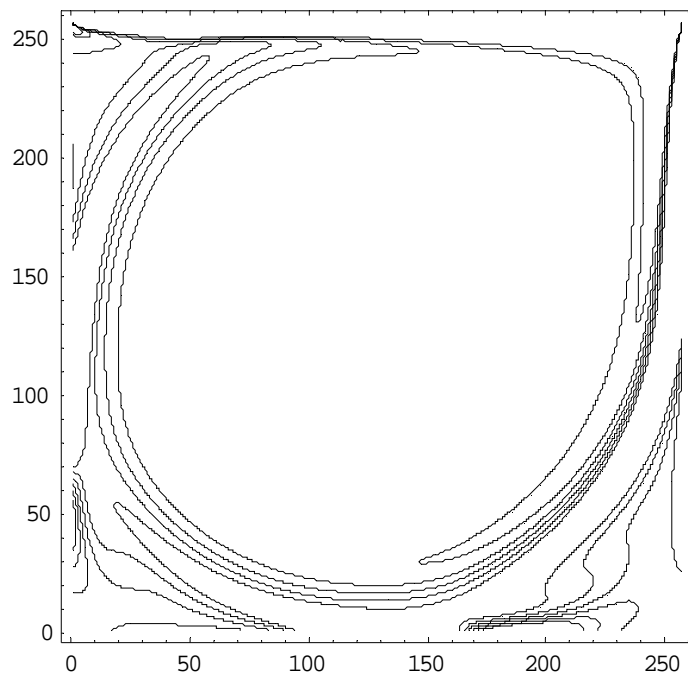
**Figura 3.21.** Líneas de Corriente de la Función Corriente para  $Re = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/32$ .



**Figura 3.22.** Isocontornos de la Función Vorticidad para  $Re = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/32$ .

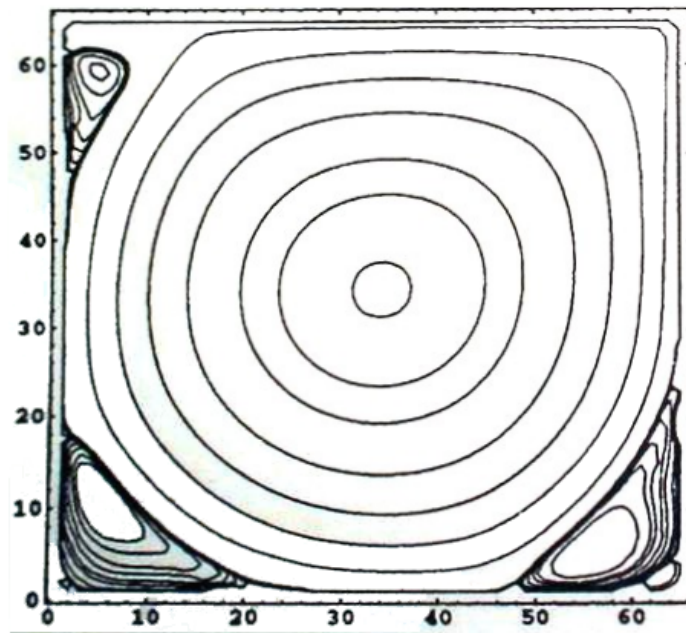


**Figura 3.23.** Líneas de Corriente de la Función Corriente para  $Re = 3200$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/256$ .

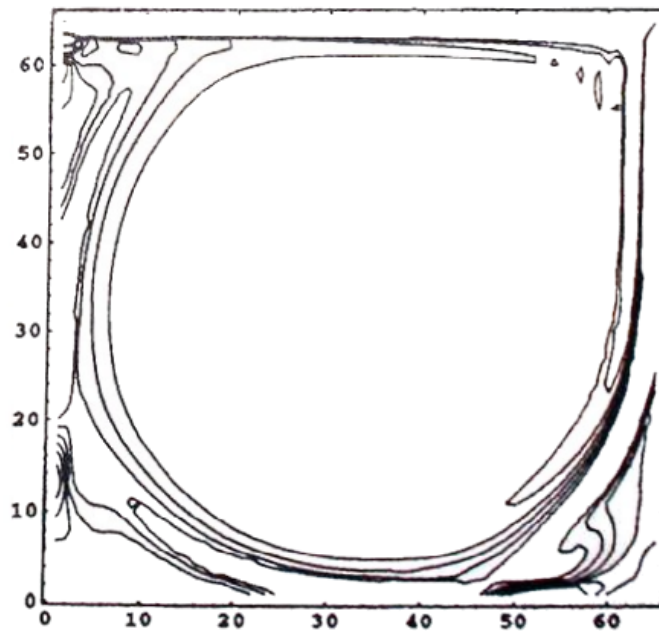


**Figura 3.24.** Isocontornos de la Función Vorticidad para  $Re = 3200$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/256$ .

Aquí se muestran las líneas de corriente y los Isocontornos para  $Re = 7500$  con  $h = 1/64$ .



**Figura 3.25.** Líneas de Corriente de la Función Corriente para  $Re = 7500$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/64$



**Figura 3.26.** Isocontornos de la Función Vorticidad para  $Re = 7500$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $t = 200$  y  $h = 1/64$

En las figuras se pueden apreciar distintos números de Reynolds con diferentes tamaños de paso en la malla, la figura 3.19 y 3.20 se comparo con el resultado reportado en [17] obteniendo una buena aproximación. Los resultados reportados para las figura 3.21 y 3.22 muestran los contornos correspondientes para  $Re = 1000$  pero esta vez se comparo contra los obtenidos en [44]. La figura 3.23 y 3.24 nos dan las líneas de corriente y los isocontornos para  $Re = 7500$ , además concuerdan con los reportados en [44]. Por último las figuras que aparecen como 3.25 y 3.26, se observa que el número de sub-vórtices se incrementa conforme el tiempo aumenta hasta alcanzar el estado estacionario.

## 4. CONCLUSIONES

Se han presentado, experimentos numéricos-analíticos de fluidos viscosos, incompresibles e isotérmicos, que dependen del tiempo (el vórtice de Taylor) y, que convergen a un estado estacionario (problema de la cavidad cuadrada) en dos dimensiones gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios rectangulares. Los resultados muestran números de Reynolds  $400 \leq Re \leq 7500$  utilizados en dos problemas distintos, el primero de ellos el problema del Vórtice de Taylor y el segundo la Cavidad Cuadrada. El estudio indica una relación directa entre el número de Reynolds y el aspecto final de la grafica resultante. El método utilizado no fue capaz de resolver por completo el problema del vórtice de Taylor aquí planteado, en forma numérica, de manera que se utilizó la solución analítica para la vorticidad y se resolvió numéricamente solo para la función corriente.

Los esquemas matemáticos y algoritmos aquí propuestos nos dan una solución que resulta buena a partir de un método simple.

Se trabajo con números de Reynolds razonablemente grandes y mallas finas, obteniendo muy buenos resultados con respecto a investigaciones anteriores, donde se hace uso de números de Reynolds “chicos” y mallas gruesas, lo cual implica que la solución puede tornarse complicada.

Dicho esquema puede ser utilizado para aproximar a estados estacionarios y no-estacionarios.

Se puede decir que las soluciones obtenidas presentan mayor número de vórtices o remolinos cuanto menor es la viscosidad del fluido, por el contrario mientras, mayor sea la viscosidad, menor será el número de vórtices que se muestren en las graficas.

Como se muestra, algunas soluciones se pueden obtener resolviendo numéricamente estas ecuaciones para distintas viscosidades (representados por  $\nu = \frac{1}{Re}$ ; cuanto mayor es  $Re$ , menor resulta la viscosidad)

Los resultados muestran que cuando el número de Reynolds  $Re$  es grande existe mayor actividad, por lo tanto se forma una mayor cantidad de vórtices en el fluido. Cuando el valor de la viscosidad es grande, el flujo presenta menos movimiento interno, mostrando en las gráficas un menor número de vórtices debido a mayores fuerzas de rozamiento existentes en el fluido.

La solución numérica de los problemas antes planteados (Vórtices de Taylor y Cavidad Cuadrada) involucra mayor esfuerzo de cómputo, en los casos en que el valor para el tiempo  $T$  es grande, causando un mayor tiempo de ejecución en el programa utilizado, además al disminuir el tamaño de la malla el tiempo también se incrementa mientras que si el tamaño de las mallas es grande se disminuye el tiempo de procesamiento.

En el problema de la cavidad cuadrada se observan ciertos número de sub-vórtices, mientras que cuando el tiempo aumenta el número de estos mismos también se incrementa en las figuras (3.19 – 3.26).

Es por eso que durante todo este tiempo en el desarrollo de este proyecto de tesis, se ha comprendido la importancia de relacionar distintas materias todo con un mismo fin, el análisis de una situación existente en el mundo real a partir de leyes físicas conocidas, para evolucionar en un modelo matemático y posteriormente realizar una simulación numérica mediante un programa y el uso de equipo necesario para su realización. Al final hemos unido estas características para resolver nuestros problemas prueba y así presentar distintos resultados ya mostrados con anterioridad por otros autores.

## Referencias

- [1] Martín Rivas, *Elementos de Física de los Medios Continuos*, Departamento de Física Teórica, Universidad Politécnica de Valencia.
- [2] Xavier Ayneto Gubert, *Mecánica del medio continuo en la ingeniería*, Editorial UPC, Barcelona 2006.
- [3] G.E. Mase, *Teoría y problemas de mecánica del medio continuo*, (Colección Schaum) McGraw Hill (1977).
- [4] A.L. Fetter y J.D. Walecka, *Theoretical mechanics of particles and continua*, McGraw Hill, New York (1980).
- [5] G.F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw Hill, Madrid, 1993.
- [6] A.M. Criado Pérez, *Fundamentos de Mecánica*, Universidad de Sevilla (1979).
- [7] Juan Luis Vázquez, *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica de Fluidos*, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, España, 2003.
- [8] Crespo Martínez, *Mecánica de Fluidos*, A. Thomson Editores España 2006.
- [9] Merle C. Potter, David C. Wiggert, *Mecánica de Fluidos*, Thomson Learning Ibero 2006.
- [10] Sherman F. *Viscous Flow*. McGraw Hill 1990.
- [11] Hughes W., Brighton J. *Fluid Dynamics*. Schaums Outline Series McGraw Hill 1991.
- [12] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Reverté, Barcelona, 1991.
- [13] R. Fernández Fera, *Mecánica de fluidos*, Universidad de Málaga 2001.
- [14] Jorge Cossio, *Contribución al estudio de las ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo Elíptico*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Vol. 28 (106) (2004), 135-145.
- [15] Diego Córdoba, Marco Antonio Fontelos y José Luí Rodríguez, *Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas*, La gaceta de la RSME, Vol. 8.3 (2005), Págs. 53–83.
- [16] M.W. Hirsch, S. Smale, *Ecuaciones Diferenciales ordinarias, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Ed., Madrid, 1983.
- [17] Nicolás A, Bermudez B. *2D Incompressible Viscous Flows at Moderate and High Reynolds Numbers*. Computer Modeling in Engineering and Sciences 2004; 6(5):441-451.

- [18] Dean EJ, Glowinsky R, Pironneau O. Iterative solution of the stream function-vorticity formulation of the Stokes problem, applications to the numerical simulation of incompressible viscous flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1991;87:117-155.
- [19] Kalita, Dass & Nidhi 2000 *Efficient Transient Navier – Stokes Solver* Int. J. Numer. Meth. Fluids; 00. 1 – 6.
- [20] Sergio Reyes Coca, *Introducción a la meteorología*, Universidad Autónoma de Baja California, Mexicali, Baja California, México.
- [21] Carabias, Julia (Ex-Secretaria del Medio Ambiente) y Rosalba Landa, *Agua, Medio Ambiente y Sociedad*, Hacia la gestión integral de los recursos Hidráulicos en México, UNAM, El Colegio de México, Fundación Gonzalo Río Arronte. México, D.F., 2005.
- [22] Bermúdez Juárez Blanca del Carmen M<sup>a</sup>. *Un esquema Numérico para Flujos Isotérmicos y Térmicos*. Tesis para la obtención del grado de Doctor en Ciencias, Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa, división de ciencias Básicas e Ingeniería.
- [23] Bermudez, B.; Nicolas, A. 1999: *An Operator Splitting numerical Scheme for Thermal/Isothermal Incompressible Viscous Flows*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 29,397 – 410.
- [24] Báez E, Bermúdez B, Nicolás A. Convección natural en medios porosos y libres: simulación numérica. *Revista Mexicana de Física* 2004; 50(1):36-48.
- [25] Anson D. K., Mullin T. & Cliffe K. A. 1988 *A numerical and experimental investigation of a new solution in the Taylor vortex problem* J. Fluid Mech. Pag. 475 – 487.
- [26] Tadashi Hodohara, Junichi Matsumoto and Mutsuto Kawahara: *Analysis of the Taylor Vortex flow*, Civil Engineering, Chuo University, Tokyo, Japan.
- [27] Hernán Estrada Bustos, *Física computacional*, Unibiblos, Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia.
- [28] I.S. Sokolnikov, *Análisis tensorial*, Index, Madrid (1979).
- [29] Leutloff D., Srivastava R. C. (Eds) *Computational Fluid Dynamics*. Springer 1995.
- [30] Landau LD, Lifshitz EM. *Fluid Mechanics* (2<sup>nd</sup> edn). Pergamon Press: New York, 1989.
- [31] Foias C, Manley O, Rosa R, Teman R. *Navier-Stokes Equations and Turbulence*. Cambridge University Press, 2001.

- [32] Josep M. Bergadà Graño, *Mecánica de fluidos: Problemas resueltos*, Editorial UPC, Barcelona 2006.
- [33] Griebel M., Dornseifer T., Neunhoffer T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation 1998.
- [34] Tannehill J.C., Anderson D. A., Pletcher R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis 1997.
- [35] Wong S. *Computational Methods in Physics and Engineering*. World Scientific 1992.29
- [36] DeVries P. *A First Course in Computational Physics*. Wiley 1994.
- [37] Adams, J.; Swarztrauber, P; Sweet, R. 1980:FISH-PACK: *A Package of Fortran Subprograms for the Solution of Separable Elliptic PDE's*, The National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, USA.
- [38] Goyon, O. (1996): High-Reynolds number solution of Navier-Stokes equations using incremental unknowns. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 130, 319-335.
- [39] Sweet R. A cyclic reduction algorithm for solving block tridiagonal systems of arbitrary dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1977; 14:706.6
- [40] Mohammadi B, Pironneau O. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. Wiley: New York, 1994.4
- [41] Burden, R.L. y Faires D., *Análisis numérico*, Grupo Editorial Íbero América 1985.13
- [42] Koonin S. Meredith D. *Computational Physics*. Addison Wesley 1990.24
- [43] Press W., Flannery B.P., Teukolsky S. A., Vetterling W. *Numerical Recipes*. Cambridge. 1992.31
- [44] Gourlay A. R., Watson G.A. *Computational Methods for Matrix Calculation*. Wiley 1973.32
- [45] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1967.34