

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

ASPECTOS FÍSICOS Y NUMÉRICOS COMPUTACIONALES DE LAS ECUACIONES DE NAVIER – STOKES EN VARIABLES VELOCIDAD Y VORTICIDAD

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:

JOSÉ ANTONIO CARRASCO HERNÁNDEZ

ASESORES:

**DRA. BLANCA BERMÚDEZ JUÁREZ
DR. ALFREDO NICOLÁS CARRIZOSA**

PUEBLA PUE. MARZO DE 2009

Sumario

En la presente tesis, se muestra una solución numérica a las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones, para el caso de un fluido no estacionario, incompresible, viscoso e isotérmico. Se resolverán dos problemas prueba, en los cuales se hará uso de la formulación velocidad – vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes; el primer problema trata sobre vórtices de Taylor, es decir un vórtice se forma en un flujo laminar al aumentar la velocidad de rotación del flujo. El segundo problema es de la cavidad cuadrada con tapa deslizable, el cual trata de estudiar el comportamiento de recirculación de un flujo dentro de una cavidad; para nuestros dos problemas la solución se obtiene al satisfacer las condiciones de frontera de nuestra región de estudio. Para ambos casos se muestran las graficas de las soluciones obtenidas de estos problemas, presentando números de Reynolds que van desde 400 hasta 7500, con mallas considerablemente gruesas.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN.	1
2. ANTECEDENTES TEORICOS.	4
2.1. Concepto de Fluido.	4
2.2. Hipótesis del Medio Continuo.	6
2.3. Descripción Euleriana y Langrangiana.	9
2.4. Características de los fluidos.	9
2.4.1. Viscosidad.	10
2.4.2. Compresibilidad.	10
2.4.3. Presión y temperatura.	11
2.4.4. Densidad.	11
2.5. Tipos de Fluidos.	12
2.5.1. Fluidos Newtonianos.	12
2.5.2. Fluidos no Newtonianos.	12
2.6. Regímenes de flujo	13
2.6.1. Régimen Laminar y Turbulento.	13
2.6.2. Flujo estacionario y no estacionario.	14
2.6.3. Flujo rotacional y no-rotacional.	14
2.7. Leyes de Conservación.	14
2.7.1. Ley de conservación de la masa.	14
2.7.2. Ley de conservación de la cantidad de movimiento.	15
2.7.3. Ley de conservación de la energía.	15
2.8. Vorticidad y Velocidad.	15
2.8.1. Vorticidad.	15
2.8.2. Velocidad.	16
3. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.	19
3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en variables primitivas.	22
3.2. Formulación Velocidad-Vorticidad.	24
4. MÉTODO NUMÉRICO Y RESULTADOS NUMERICOS.	28
4.1. Dos Problemas Prueba.	30
4.1.1. Primer problema prueba: El Vórtice de Taylor.	30
4.1.2. Tablas de resultados y gráficas de la solución del vórtice de Taylor.	33
4.1.3. Segundo problema prueba: El problema de la Cavity Cuadrada con tapa deslizable.	43
4.1.4. Gráficas de la solución del problema de la Cavity Cuadrada con tapa deslizable.	44
5. CONCLUSIONES.	49
Referencias	50

1. INTRODUCCIÓN

Para este proyecto de tesis, nos internaremos en el campo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, con el objetivo de resolver de manera eficiente un sistema dado por estas ecuaciones, el cual describe un problema de la mecánica de fluidos. Para nuestro estudio particular el sistema a resolver está propuesto por las ecuaciones de Navier-Stokes en su formulación velocidad - vorticidad.

Es así que en el presente proyecto de tesis iniciaremos con una introducción al análisis numérico y la teoría matemática de los fluidos, definiendo algunos conceptos básicos y nos enfocaremos principalmente en los sistemas de ecuaciones que rigen el movimiento de los distintos tipos de fluidos (ideales y reales). Además analizaremos dos problemas prueba, el primero: el problema de Vórtice de Taylor y el segundo: el problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizable. Posteriormente se presentará la solución de estos problemas por medio de gráficas presentadas en la sección 4.

En el capítulo II, veremos el concepto básico de fluido así como algunas definiciones sobre fluidos ideales y gas ideal además se explicarán brevemente las leyes que satisfacen a estos fluidos. Para tener una mejor comprensión del tema, hablaremos de la hipótesis del medio continuo [1], [2], [3] y [4]; esta hipótesis es fundamental en la dinámica de fluidos y para el estudio de los mismos. Se definirán también las características de los fluidos [1] y [2], las cuales tendrán un papel importante en nuestro estudio, caso de ello es la viscosidad, que matemáticamente representaremos con el número de Reynolds ($1/Re$), y que en las gráficas de nuestros resultados veremos de manera clara como afecta el comportamiento del fluido.

Un punto importante en nuestro estudio es la clasificación de los distintos tipos de fluidos [8], [9], [10] [11], [12] y [13] y las dos divisiones importantes de estos, los fluidos Newtonianos y los fluidos no newtonianos, estos últimos, al tener una viscosidad variable, se reclasifican en diversos grupos. Para nuestro caso particular de estudio nos enfocaremos en los fluidos viscosos, isotérmicos e incompresibles. Posteriormente se formulan respectivamente las leyes de Euler y Navier-Stokes, que son las utilizadas para dar solución a nuestro problema práctico. Para formular estas leyes veremos sus bases establecidas en la ley de conservación de la masa, ley de conservación de la cantidad de movimiento y la ley de conservación de la energía, [5], [15], [16] y [16] estas leyes se explicarán brevemente más adelante.

Dos conceptos importantes que se definirán, en esta sección, son la vorticidad y la velocidad, ambos serán de importancia en esta tesis, pues en estos conceptos basaremos nuestra formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes [17], [18] y [19].

En el capítulo III, nos enfocaremos en las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales, son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de fluidos usuales, éstas se derivan de la ecuación de continuidad de la masa y del principio de conservación de la cantidad de movimiento. Veremos la formulación en variables primitivas de estas ecuaciones de las cuales al aplicar esquemas numéricos obtendremos nuestra formulación final (Formulación velocidad-vorticidad), con la cual trataremos de dar solución a nuestros problemas prueba.

En esta sección se describirá a detalle el proceso para la obtención de la formulación velocidad-vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, el uso de esta formulación, resultó conveniente para nuestro estudio ya que nos evita manejar la variable presión. El trabajar con la presión haría que se complicara de manera considerable la solución de nuestro problema al incrementar el número de ecuaciones. Después de aplicar una discretización de segundo orden a nuestras ecuaciones, obtenemos un sistema que se resuelve al aplicar el método de iteración de punto fijo; esto se trabaja en una región bidimensional.

En el capítulo IV se explicará de forma más completa los problemas que deseamos resolver y la solución de los mismos. Para el problema del vórtice de Taylor definiremos las condiciones de frontera con las que vamos a trabajar y pondremos especial atención en la dependencia del tiempo sobre el fluido. Daremos una solución numérica y se cuenta con una solución analítica de este problema. En el problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizante definiremos la región en la cual trabajaremos con el fin de converger a un estado estacionario, la solución de este problema se representa por las gráficas obtenidas, que se mostrarán más adelante en esta sección, de esta manera veremos los cambios al variar el grueso de la malla. Ambos problemas se plantean en una región 2-D. Además en las gráficas de los resultados, observaremos como afecta el modificar ciertos parámetros como el número de Reynolds y la dependencia de la solución en el tiempo t . La solución de estos problemas prueba, se obtendrá por medio de un programa graficando los resultados obtenidos, de tal manera que la solución de los problemas sea más clara.

Finalmente en el capítulo V se presentarán las conclusiones, obteniendo los resultados que se esperaban y dando una buena solución a nuestros dos problemas pruebas, Para el problema de vórtice de Taylor los resultados que se obtuvieron, muestran el desempeño del fluido a lo largo del tiempo así como cambios importantes al modificar el número de Reynolds. En el caso del problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizante las soluciones obtenidas fueron buenas, llegando a un estado estacionario, cumpliendo con los resultados esperados; para verificar la solución correcta de estos problemas se compararon con resultados presentados por otros autores [17] y [21].

La simulación numérica de este tipo de problemas en [17], [18], [19], [22], [23], [24], [25] y [26] es de gran importancia en la actualidad, pues esto representa ciertas ventajas respecto a los ensayos experimentales. La simulación numérica,

ofrece una mayor flexibilidad en las variables que se desea medir así como en los cambios de la geometría que pueda presentar el problema, reduciendo la inversión económica y obteniendo resultados en un plazo de tiempo corto. Sin embargo los resultados obtenidos mediante la simulación, se deben de interpretar de manera cuidadosa puesto que su exactitud dependerá en gran medida del modelo matemático que esté representando al modelo físico así como de la técnica numérica con la cual se resuelven las ecuaciones. Es conveniente que los resultados obtenidos por medio de estas simulaciones numéricas puedan ser comparados con los resultados obtenidos de ensayos experimentales y con otros resultados que se consideren correctos.

2. ANTECEDENTES TEORICOS

En este capítulo se darán a conocer conceptos básicos de la mecánica de fluidos, con el fin de facilitar la comprensión de los temas desarrollados en este proyecto de tesis, así mismo se describirán estos conceptos de una forma sencilla, y abordando las ideas principales de los mismos.

Primero que nada se dará una breve explicación sobre el concepto de fluido, plantaremos el concepto básico de la hipótesis sobre el medio continuo; ésta hipótesis se verá a menudo en la teoría de la mecánica de fluidos. Finalmente se describirán las características de los fluidos.

2.1 Concepto de Fluido:

Se define como aquella sustancia que continuamente se está deformando debido a la poca cohesión intermolecular que existe en ellos. Son fluidos los líquidos, los gases, el plasma y en otro sentido plásticos y sólidos; aún con sus grandes diferencias, entre estos estados. Su comportamiento como fluido se describe con las mismas ecuaciones básicas. La diferencia entre uno u otro está en su compresibilidad. Un fluido:

- Cambia su forma según el envase.
- Se deforma continuamente bajo fuerzas aplicadas.

Para cualquier sustancia el estado líquido existe a una temperatura mayor que la del estado sólido, tiene mayor agitación térmica y las fuerzas moleculares no son suficientes para mantener a las moléculas en posiciones fijas y se pueden mover en el líquido. Lo común que tiene con los sólidos es que si actúan fuerzas externas de compresión, surgen grandes fuerzas atómicas que se resisten a la compresión del líquido. En el estado gaseoso las moléculas tienen un continuo movimiento al azar y ejercen fuerzas muy débiles unas con otras; las separaciones promedio entre las moléculas de un gas son mucho más grandes que las dimensiones de las mismas. La diferencia entre sólidos y fluidos no es muy obvia, pero se da al evaluar la viscosidad de la sustancia con la que nos encontramos trabajando.

Los plásticos son los que se comportan como fluidos o como sólidos, dependiendo de la tensión tangencial de rozamiento que actúe sobre ellos y que fluyen únicamente cuando alcanzan la denominada tensión crítica de flujo. El estudio de la dinámica de fluidos es similar al clásico de la dinámica de sólidos usando las mismas ecuaciones desde hace 150 años, en que se estudia el movimiento bajo la acción de fuerzas aplicadas, y es por esta razón que se aplican los mismos principios:

- Conservación de la masa
- Conservación del momento

- Conservación de la energía termodinámica

Las ecuaciones de movimiento son usadas en la dinámica y las ecuaciones de continuidad se usan en la cinemática. A continuación describiremos brevemente la dinámica y la cinemática.

Cinemática: Describe el movimiento de un cuerpo sin considerar las causas que lo producen.

Dinámica: Estudia el movimiento teniendo en cuenta las causas que la producen, y las causas son las fuerzas.

Las tres ecuaciones de conservación son cinco ecuaciones diferenciales parciales con seis incógnitas. Para cerrar el sistema se agrega una sexta ecuación que es la ecuación de estado. A continuación se presentan conceptos más específicos sobre fluidos y gases, así como algunas leyes que satisfacen a los gases:

a) Fluido ideal

Se trata de un fluido imaginario que no ofrece resistencia al desplazamiento (no viscoso), es permanente, no-rotacional, incompresible y en general tridimensional.

b) Gas Ideal y Gas Real

Como ya se dijo los gases tienen ciertas características que están regidas por leyes ahora definiremos estas leyes.

Los gases tienen la propiedad de llenar el espacio donde se almacenan y ejercer una presión sobre las paredes de dicho contenedor. Una cierta cantidad de gas, se caracteriza por las siguientes magnitudes físicas: su masa m , el volumen que ocupa V , la presión a la que se encuentra p y su temperatura T .

c) Ley de Boyle

Establece que la presión de un gas en un recipiente cerrado es inversamente proporcional al volumen del recipiente. Esto quiere decir que si el volumen del contenedor aumenta, la presión en su interior disminuye y, viceversa, si el volumen del contenedor disminuye, la presión en su interior aumenta. Esta ley puede escribirse como:

$$pV = \text{constante}, \quad T = \text{Constante}.$$

Esta ley cuenta con un rango limitado de validez: a temperaturas próximas a la temperatura ambiente y a presiones no muy superiores a la atmosférica, la mayoría de los gases satisfacen esta ley. Sin embargo, a grandes presiones, los gases se comprimen menos de lo que se espera según la ley.

d) Ley de Charles

Esta ley establece, que, a volumen constante, la presión de una masa fija de un gas dado varía de forma lineal con la temperatura:

$$p = p_0(1 + \beta T), \quad V = \text{Constante},$$

en donde p_0 es la presión a la temperatura de cero grados centígrados, $t = 0^\circ\text{C}$ y β es el coeficiente de dilatación a volumen constante o coeficiente térmico de presión.

e) Ley de Gay-Lussac

Establece que el volumen de un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta, asumiendo que la presión se mantiene constante. Esto quiere decir que en un recipiente flexible que se mantiene a presión constante, el aumento de temperatura conlleva un aumento del volumen y se define como:

$$V = V_0(1 + \alpha T), \quad p = \text{Constante},$$

en donde p_0 es la presión a la temperatura de cero grados centígrados, $T = 0^\circ\text{C}$ y α es el coeficiente de dilatación a presión constante también llamado coeficiente de dilatación cúbica.

Teniendo en cuenta todas estas leyes los gases reales son los que en condiciones ordinarias de temperatura y presión se comportan como gases ideales; pero si la temperatura es muy baja o la presión muy alta, las propiedades de los gases reales se desvían en forma considerable de las de los gases ideales.

Se considera que un gas ideal presenta las siguientes características: el número de moléculas es despreciable comparado con el volumen total de un gas; no hay fuerza de atracción entre las moléculas, las colisiones son perfectamente elásticas y evitando las temperaturas extremadamente bajas y las presiones muy elevadas, podemos considerar que los gases reales se comportan como gases ideales.

2.2 Hipótesis del Medio Continuo

La teoría de la mecánica de los fluidos puede ser desarrollada desde dos puntos de vista.

a) El microscópico: Aquí la estructura molecular del medio se tiene en cuenta explícitamente. Ejemplos de esto son la teoría cinética de los gases y la mecánica estadística.

b) El macroscópico: En este enfoque no se toma en cuenta explícitamente la estructura molecular del medio, sólo se consideran las propiedades más sobresalientes de la materia. Las propiedades físicas del medio se miden directamente por los instrumentos.

Las moléculas de un gas (y aún de los líquidos) están separadas por inmensas regiones vacías cuyas dimensiones lineales son mucho más grandes que el tamaño de las moléculas mismas. La masa del material está concentrada en el núcleo de los átomos que componen la sustancia, y no está uniformemente expandida en el volumen ocupado por ésta. Una propiedad del fluido es que tiene una distribución no uniforme cuando se ve el fluido desde una pequeña escala a nivel atómico. Así, la materia no es continua.

La mecánica de fluidos normalmente está relacionada con las propiedades más comunes del medio, sin embargo suponemos que el comportamiento macroscópico de la atmósfera (vista como un fluido) se comporta de la misma forma como si fuera una estructura perfectamente continua.

Las cantidades físicas tales como masa, momento, temperatura, velocidad, etc., asociados con la materia en un pequeño volumen dado puede ser considerado como si estuvieran uniformemente expandidas sobre ese volumen en vez de concentrado en una fracción del mismo. Esto se llama "**Hipótesis del Continuo**". Esta hipótesis significa que es posible asignar valores definidos de las propiedades del fluido a un punto, y que los valores de esas propiedades son funciones continuas de la posición y del tiempo.

En otras palabras, es posible analizar sistemas extensos de materia, como si ésta estuviera constituida por un todo continuo, sin espacios vacíos. Se trata de aproximar los sistemas extensos mediante la hipótesis de que un sistema material de muchas partículas puede ser considerado como continuo. Son situaciones en las que el comportamiento macroscópico del sistema material se explica sin tener presente su estructura molecular.

A diferencia, de lo que se plantea con la teoría atómica en [2], según la cual describe la "realidad" a nivel de átomos, es decir, los sistemas extensos de materia, se describen a una escala inferior. Todas las propiedades del sistema como densidad, presión, velocidades, aceleraciones, estado de tensiones, etc., serán funciones continuas en el espacio y en el tiempo. La ciencia encargada de estudiar todo lo relacionado con el movimiento de fluidos y su medio que los rodea es la Mecánica de fluidos, es precisamente de esta ciencia, de donde se desglosa esta hipótesis del medio continuo y es de la Física que se desprende, la Física de los medios continuos, y tiene como objetivo de estudio los sistemas materiales cuya apariencia a escala microscópica es la de un todo continuo. Desde el siglo XIX la física ha estudiado y analizado la física de los medios continuos, haciendo que este estudio sea aplicado en otras áreas como por ejemplo el electromagnetismo, Termodinámica, etc.

Un fluido es un medio continuo [8], es decir un agregado que se mueve provocando que se deforme en forma continua en el tiempo t y crea un todo continuo en el espacio. Se puede pensar en el medio como compuesto de partículas puntuales. En esto no hay ninguna objeción matemática; en los últimos siglos las matemáticas se han inclinado frecuentemente por la consideración de magnitudes continuas frente a las discretas, en esta hipótesis se basan la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales, y una gran parte de los procesos estocásticos, pero respecto al cálculo numérico, este no ha tenido una participación importante en la hipótesis del medio continuo.

La mecánica, como ciencia física, juega un papel importante pues pretende describir el comportamiento de los cuerpos, en cualquiera de sus estados: líquido, gaseoso, plasma o sólido, y por tanto apoya su formulación matemática en la práctica y la teoría. Con respecto al concepto fundamental del medio continuo se considera una abstracción que está en contra de una teoría incontestable y ampliamente verificada, la teoría atómica, que describe la realidad de niveles inferiores a los nanómetros.

La aproximación del medio continuo resulta ser tan efectiva que con frecuencia olvidamos que se trata de un modelo, por lo que es conveniente tener en cuenta las hipótesis de partida. Así, la consideración del fluido como un medio continuo se basa en que éste consiste en un agregado de partículas en movimiento caótico y que la distancia característica de este movimiento, llamado técnicamente "recorrido libre medio entre colisiones", λ es mucho menor que las longitudes experimentales ($>10^{-5}$ cm.) de forma que sólo percibimos un cierto promedio de los procesos individuales entre partículas.

En el estudio de la Mecánica de Fluidos es conveniente suponer que los fluidos están continuamente distribuidos dentro de una región muy particular esto es, el fluido se trata como un medio continuo. Los cuerpos difieren por lo general en su masa y en su volumen. Estos dos atributos físicos varían de un cuerpo a otro, de modo que si consideramos cuerpos de la misma naturaleza, cuanto mayor es el volumen, mayor es la masa del cuerpo considerado. No obstante, existe algo característico del tipo de materia que compone al cuerpo en cuestión y que explica el porqué dos cuerpos de sustancias diferentes que ocupan el mismo volumen no tienen la misma masa o viceversa. Aun cuando para cualquier sustancia la masa y el volumen son directamente proporcionales, la relación de proporcionalidad es diferente para cada sustancia.

Una forma de comprobar si el modelo del medio continuo es aceptable en [35], es la de comparar una longitud característica l del objeto de interés con la **trayectoria libre media** λ , la distancia promedio que recorre una partícula antes de colisionar con otra; si $l \gg \lambda$ el modelo del medio continuo es aceptable.

La trayectoria libre media se deriva de la teoría molecular. Así,

$$\lambda = 0.225 \frac{m}{\rho d^2},$$

donde m es la masa (kg) de una molécula, ρ es la densidad (kg/m^3) y d es el diámetro (m) de una molécula.

En base a esta suposición del medio continuo, las propiedades de un fluido pueden ser aplicadas uniformemente en todos los puntos de una región dada en cualquier instante en particular.

Como conclusión a este tema podemos decir, que en la hipótesis del medio continuo, un fluido se considera como continuo a la largo del espacio que este ocupa, por lo que su estructura molecular y discontinuidades asociadas a él no se toman en cuenta. Con esta hipótesis consideramos que las propiedades de los fluidos (densidad, temperatura, etc.) son funciones continuas. Es por esto que esta hipótesis es importante en la mecánica de fluidos, pues como ya se mencionó, la estructura molecular de nuestro fluido es ignorada.

2.3 Descripción Euleriana y Langrangiana.

Ambas formulaciones, describen el movimiento de un fluido, la descripción Langrangiana sigue a cada partícula fluida en su movimiento, de manera que buscaremos unas funciones que nos den la posición, así como las propiedades de la partícula fluida en cada instante, mientras que la descripción Euleriana nos dice que se debe asignar a cada punto del espacio y en cada instante un valor para las propiedades o magnitudes fluidas sin importar la partícula fluida que en dicho instante ocupa ese punto, que no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido. En esta descripción el valor de una propiedad en un punto y en un instante determinado es el de la partícula fluida que ocupa dicho punto en ese instante.

La descripción Euleriana es la usada para la obtención de las ecuaciones generales de la Mecánica de Fluidos y en la mayoría de casos y aplicaciones es más útil. Sin embargo de un modo más general podría decirse que ambas descripciones son equivalentes.

2.4 Características de los fluidos.

Una vez vistos los conceptos básicos sobre fluidos y la hipótesis del medio continuo, es conveniente comentar las características de los fluidos así como los distintos tipos de estos, ya que estas las características nos ayudaran a tener una mejor comprensión sobre los conceptos que se utilizaran más adelante.

La materia puede existir en diversas formas de agregación de las partículas permitiendo así distinguir los diferentes estados de la materia: Sólido, Líquido, Gaseoso y Plasma. Estos diferentes estados en [1] y [7] se pueden identificar por algunas características que se presentan a continuación.

2.4.1 Viscosidad.

La viscosidad es un parámetro del fluido muy importante para el estudio de los mismos. Está ligada a la resistencia que opone un fluido a deformarse continuamente cuando se le somete a un esfuerzo de corte. Esta propiedad es utilizada para distinguir el comportamiento entre fluidos y sólidos. Un fluido podría considerarse como viscoso si las fuerzas de roce internas que actúan sobre él son apreciables; otra forma de decirlo es que disipa una cantidad apreciable de energía asociada con el transporte de fluidos en ductos, canales y tuberías debido al roce, esto se define por las ecuaciones de Navier-Stokes. Si la viscosidad del fluido no juega un papel importante en su movimiento, se le llama no-viscoso o ideal expresado por las ecuaciones de Euler. Dependiendo de su viscosidad fluyen a mayor o menor velocidad. Mientras más viscoso fluye con menor velocidad, mientras menos viscoso fluye con mayor velocidad y tienden a comportarse como aquellos fluidos que se pueden desplazar sin presentar resistencia alguna (fluido ideal).

La viscosidad se debe a las fuerzas que aparecen entre dos partes del fluido que se desplazan una con respecto a la otra. Por lo tanto, la viscosidad es la propiedad de los fluidos que provoca la aparición de esfuerzos o tensiones cortantes y a su vez es responsable de que se produzcan pérdidas y, por lo tanto, que el flujo sea irreversible.

2.4.2 Compresibilidad.

En Mecánica de Fluidos se considera típicamente que los fluidos se dividen en dos categorías que en la mayoría de los casos requieren un tratamiento diferente: los fluidos compresibles y los fluidos incompresibles. Que un tipo de fluido pueda ser considerado compresible o incompresible no depende sólo de su naturaleza o estructura interna sino también de las condiciones mecánicas sobre el mismo. Así, a temperaturas y presiones ordinarias, los líquidos pueden ser considerados sin problemas como fluidos incompresibles, aunque bajo condiciones extremas de presión muestran una compresibilidad estrictamente diferente de cero. En cambio los gases debido a su baja densidad aún a presiones moderadas pueden comportarse como fluidos compresibles. Por estas razones, técnicamente, más que hablar de fluidos compresibles e incompresibles se prefiere hablar de los modelos de flujo adecuados para describir un fluido en unas determinadas condiciones de trabajo y por eso más propiamente se habla de flujo compresible e incompresible.

La descripción matemática de un fluido incompresible, es decir de densidad constante, en las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes se hace mediante:

- El campo de velocidades $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ que nos da la velocidad que tendría una partícula en cada punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ del espacio y cada tiempo t .
- La presión $p = p(x, t)$ del fluido.

Un fluido se considera compresible si la velocidad del fluido es comparable o mayor que la velocidad del sonido en el fluido. Normalmente uno puede suponer que los fluidos son incompresibles, en otras palabras, su volumen permanece constante frente a los cambios de presión que experimenta el fluido.

2.4.3 Presión y temperatura.

Tanto la presión como la temperatura son variables (dependientes de la posición \bar{x} y el tiempo t) físicas que pueden ser aplicadas con escalas diferentes por ejemplo, existen escalas absolutas que miden estos parámetros y también escalas que miden estas cantidades con respecto a puntos de referencia.

En Mecánica de Fluidos la presión es un término resultante de una fuerza de compresión normal que actúa sobre un área. La presión se define como:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A},$$

donde ΔF_n es la fuerza de compresión normal que actúa en el área ΔA . Las unidades métricas utilizadas para la presión son (N/m^2) o *Pascal (Pa)*.

2.4.4 Densidad.

La principal propiedad para determinar si un medio es continuo es la **densidad** ρ que se define como:

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

donde Δm es la masa incremental contenida en el volumen incremental ΔV .

Cuando se aumenta la temperatura de un fluido, los átomos que lo componen comienzan a vibrar y el fluido se expande, ocupando más espacio y, por tanto, aumenta su volumen. Según la relación anterior, al aumentar el volumen, la densidad será cada vez más pequeña y el fluido será cada vez más "fluido" [35].

La densidad de una sustancia es una variable dependiente cuya masa corresponde a un volumen de dicha sustancia. A diferencia de la masa o el volumen, la densidad depende solamente del tipo de material de que está constituido y no de la forma ni del tamaño de aquél. Se dice por ello que la

densidad es una propiedad o atributo característico de cada sustancia. En los sólidos la densidad es aproximadamente constante, pero en los líquidos, y particularmente en los gases, varía con las condiciones de medida. Así en el caso de los líquidos se suele especificar la temperatura a la que se refiere el valor dado para la densidad y en el caso de los gases se ha de indicar, junto con dicho valor, la presión.

2.5 Tipos de Fluidos.

Generalmente los fluidos suelen dividirse en dos grupos muy importantes los newtonianos y los no newtonianos [1] y [3], a continuación daremos una breve explicación de ellos.

2.5.1 Fluidos Newtonianos.

Un fluido newtoniano es aquel que cumple con la ley del rozamiento de Newton, también llamada ley de Newton de la viscosidad.

"Para un determinado fluido, la tensión tangencial de rozamiento aplicada según una dirección es directamente proporcional a la velocidad en la dirección normal a la primera, siendo la constante de proporcionalidad correspondiente el coeficiente de viscosidad". [9]

Este tipo de fluido presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la tasa de deformación que actúan sobre ellos.

2.5.2 Fluidos no Newtonianos.

Son aquellos cuya viscosidad varía con el gradiente de tensión que se le aplica. Como resultado, un fluido no Newtoniano no tiene un valor de viscosidad definido y constante a diferencia de un fluido Newtoniano y se clasifican de la siguiente manera:

a) Dilatantes

Los *Dilatantes* (arenas movedizas, lechadas) al aumentar el esfuerzo cortante la viscosidad aumenta es decir ofrece mayor resistencia al movimiento.

b) Incompresibles

Incompresibles son aquellos en los que su densidad es constante en espacio y tiempo.

c) Plásticos

Plásticos son los que se comportan como fluidos o como sólidos, dependiendo de la tensión tangencial de rozamiento que actúe sobre ellos y que fluyen únicamente cuando alcanzan la denominada tensión crítica de flujo.

d) Plásticos ideales

Plástico ideal (o *fluidos de Bingham*) a diferencia de los fluidos Newtonianos estos requieren un esfuerzo inicial τ_1 para comenzar a deformarse pero la viscosidad es constante.

e) Pseudoplásticos

Los *pseudoplásticos* no requieren de esfuerzos iniciales para comenzar el movimiento, pero la viscosidad es variable, a medida que aumenta el esfuerzo cortante, la viscosidad disminuye, es decir ofrece menor resistencia al movimiento.

f) Viscoelásticos

Los *Viscoelásticos* son los que además de presentar las propiedades de los no newtonianos, están dotados de algunas propiedades que caracterizan a los sólidos, como la elasticidad.

g) Reopéticos

Los *Reopéticos* son viscoelásticos cuya viscosidad aparente aumenta cuando lo hace el tiempo de aplicación de la tensión tangente de rozamiento y se llaman tixotrópicos cuando ésta disminuye.

2.6 Regímenes de flujo

Al movimiento de un fluido se le conoce como *flujo* [13], el movimiento de los fluidos se puede clasificar de múltiples maneras, atendiendo a diversas características. A continuación se mencionarán los diversos tipos de flujos en un fluido.

2.6.1 Régimen Laminar y Turbulento.

Un flujo se considera *laminar* cuando las partículas de un fluido se mueven a lo largo de trayectorias bastante regulares, de manera que el fluido se puede considerar como un conjunto de capas paralelas entre sí e independientes que se deslizan una sobre la otra.

El régimen es *turbulento*, cuando en el seno del fluido se forman remolinos. Esta turbulencia se puede formar de diferentes formas. El flujo turbulento consiste en un conjunto de torbellinos de diferentes tamaños que coexisten en la corriente

del fluido. Continuamente se forman torbellinos grandes que se rompen en otros más pequeños. El tiempo máximo del torbellino es del mismo orden que la dimensión mínima de la corriente turbulenta.

Un torbellino cualquiera posee una cantidad definida de energía mecánica como si se tratase de un trompo. La energía de los torbellinos mayores procede de la energía potencial del flujo global del fluido. Desde un punto de vista energético la turbulencia es un proceso de transferencia, en el cual los torbellinos grandes, formados a partir del flujo global, transportan la energía de rotación a lo largo de una serie continua de torbellinos más pequeños.

2.6.2 Flujo estacionario y no estacionario.

Un flujo es estacionario o permanente cuando las propiedades y características del flujo, en cada punto del espacio, permanecen invariantes en el tiempo. Por tanto, una característica de los flujos estacionarios es que el campo de velocidad es independiente del tiempo por lo tanto $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. En caso que $\left(\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0\right)$ se dice que el flujo es no estacionario o no permanente, al menos en un intervalo de tiempo que corresponda al estado transitorio.

2.6.3 Flujo rotacional y no-rotacional

Si alguna partícula del flujo rota se dirá que el flujo es rotacional. Si ninguna partícula lo hace se dirá que el flujo es no-rotacional.

2.7 Leyes de Conservación

La base de la mecánica de fluido se basa en 3 leyes que son primordiales para el estudio de los fluidos [1], [5] [6] y [7]. La primera de estas leyes es la Ley de la conservación de la masa, que todos conocemos, sin embargo para las dos siguientes leyes, ley conservación de la cantidad de movimiento y la ley de conservación de la energía, habrá que introducir un nuevo concepto que es el *sistema*: en este se define una cierta cantidad de materia en la cual se fijará nuestra atención. Cualquier cosa externa al sistema queda por fuera de los límites de este, tales límites pueden ser reales o imaginarios y además pueden ser también fijos o móviles.

2.7.1 Ley de conservación de la masa

Establece que la materia es indestructible [7]. Comúnmente dicho "*la materia no se crea ni se destruye*", entendamos por materia la sustancia de la cual está compuesta el fluido, lo que nos dice que es posible medir la cantidad de materia de una cierta región del espacio en un momento dado y concluir que no varía con el fluir.

2.7.2 Ley de conservación de la cantidad de movimiento

Esta ley establece que la cantidad de movimiento en un sistema dado permanece constante si no hay fuerzas que actúen sobre él. Esto se basa en el principio de la segunda ley de Newton que dice “*La suma de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema es igual a la velocidad de cambio de su cantidad de movimiento lineal*”. [9]

Se puede decir que la segunda ley de Newton, teóricamente describe todos los tipos y escalas de movimiento, sin embargo, en la práctica aun no es posible estudiar y analizar simultáneamente todos estos movimientos, por lo que tradicionalmente se simplifica este sistema dependiendo de las escalas de movimientos que se quieren estudiar; es decir, las dimensiones espaciales y temporales del fenómeno a estudiar.

2.7.3 Ley de conservación de la energía

También conocida como la *primera ley de la Termodinámica*. Esta nos dice que la energía total de un sistema aislado permanece constante. Si un sistema está en contacto con sus alrededores, su energía se incrementa sólo si la energía de sus alrededores disminuye respectivamente.

En general para el estudio de fluidos incompresibles estas tres leyes suelen ser más que suficientes, esto es, en la mayoría de los casos aunque también ocurren pequeños cambios en la presión densidad y temperatura, sin embargo para fluidos compresibles, es necesario introducir otras relaciones de modo que los cambios de densidad, temperatura y presión se tomen en cuenta apropiadamente.

En el presente estudio nos enfocaremos en los fluidos incompresibles así que estas tres leyes, mencionadas con anterioridad, serán la base para resolver nuestro problema, puesto que de ellas se derivan las ecuaciones de Navier-Stokes y de estas ecuaciones usaremos su formulación Velocidad-Vorticidad.

2.8 Vorticidad y Velocidad

A continuación definiremos estos dos conceptos los cuales son de suma importancia para nuestro estudio puesto que la formulación utilizada en esta tesis se basa en estos conceptos.

2.8.1 Vorticidad

Matemáticamente la vorticidad es definida como el rotor o rotacional de la velocidad. En dinámica de fluidos, para el campo de velocidad, vorticidad: Es una extensión del concepto de velocidad angular de una parcela de fluido que rota en torno a algún eje. Si, la expresión matemática de vorticidad es definida por el vector \mathbf{q} , la vorticidad es un campo vectorial y se pueden dibujar curvas que son tangentes al vector \mathbf{q} en cada punto.

La ley de conservación de la masa o ecuación de continuidad, establece que el cambio en el campo de velocidad de un fluido está directamente relacionado con el cambio en la densidad del mismo fluido; finalmente, el principio de conservación de momento angular establece que si el momento de las fuerzas exteriores es cero, el momento angular total se conserva, es decir, permanece constante. Este concepto es conocido como vorticidad y es la característica de los fluidos que expresa su tendencia a rotar [20].

El régimen turbulento se caracteriza por la aparición de remolinos o torbellinos a muy diversas escalas espaciales. La aparición de estructuras “rotantes” en el seno de un campo vectorial sugiere la introducción de un operador vectorial clásico que las caracteriza: el rotacional. En el contexto de la mecánica de fluidos se define la vorticidad como la circulación por unidad de área en un punto del flujo y es un vector que juega un papel crucial. La vorticidad se define como:

$$\boldsymbol{\omega}(x, t) = \nabla \times \mathbf{u}(x, t) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

La vorticidad es un término usado en mecánica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido. Para el caso de un flujo laminar la vorticidad del fluido es nula. Cuando la vorticidad es cero se dice que el movimiento es **irrotacional**.

Se habla de vorticidad ciclónica y anticiclónica, para referirse a si la orientación del giro es en el sentido de la rotación terrestre o contrario, respectivamente. El movimiento de un fluido se puede denominar solenoidal si el fluido gira en círculo o en hélice, o de forma general si tiende a rotar en torno a un eje.

Un vórtice es un flujo turbulento en rotación espiral con trayectorias de corriente cerradas. Como vórtice puede considerarse cualquier tipo de flujo circular o rotatorio que posee vorticidad

Se define **línea de vórtice** a una curva tangente en cada punto al vector vorticidad en ese punto. De particular interés es la tendencia de la parcela de fluido geofísico a rotar en torno a la vertical local. Esta se representa por la componente vertical de la vorticidad.

2.8.2 Velocidad

Es un campo vectorial. Si el punto X se encuentra actualmente en el x dado por la trayectoria del mismo, dicho punto se mueve en el instante t con la velocidad [16].

$$\mathbf{V}(X, t) = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}(X, t)$$

y se dice que esta función $V(X, t)$ constituye una descripción Lagrangiana del campo de velocidad. La función

$$u(x, t) = V(g(x, t), t)$$

representa el campo de velocidad en la descripción Euleriana y se expresa en términos de puntos del espacio x .

Supuesto conocido el campo de velocidad en la descripción Euleriana, cada punto se mueve con una velocidad tal que las líneas de corriente del sistema son las curvas tridimensionales cuyas tangentes son precisamente los vectores velocidad del medio:

$$dr = v dt ,$$

o bien

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} .$$

cuya solución general en cada instante t nos producirá la descripción geométrica de las líneas de corriente del sistema. Esta denominación es genérica y es independiente de que el sistema material sea o no un fluido.

En general se dice que la evolución dinámica del sistema material es estacionaria si las diferentes magnitudes físicas del sistema no son funciones explícitas del tiempo y por lo tanto las líneas de corriente del sistema son siempre las mismas. En particular el campo de velocidad no es función de t y las trayectorias son unas curvas fijas en el espacio. En este caso trayectorias, líneas de corriente y de emisión coinciden.

La velocidad de deformación de un fluido está directamente ligada a su viscosidad. Con un esfuerzo dado, un fluido altamente viscoso se deforma más lentamente que un fluido menos viscoso. Supongamos la siguiente relación μ para la viscosidad del fluido:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} ,$$

donde τ es el esfuerzo cortante de la ecuación $p = p_0(1 + \beta T)$ y u es la velocidad en la dirección x . Las unidades físicas de τ son (N/m^2) y las de μ están dadas por $(N \cdot s/m^2)$.

La cantidad du/dy es un gradiente de velocidad, puede ser interpretado como una velocidad de deformación y es una medida de cambio de velocidad, conocida también como rapidez de corte.

a) Velocidad Angular

Es la velocidad promedio de dos segmentos de línea perpendiculares de una partícula de fluido y está compuesta de tres componentes definidos por:

Para el eje x:

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

Para el eje y

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

Para el eje z

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

3. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Los fluidos aparecen constantemente en diversas situaciones físicas y cuya dinámica de estos fluidos depende de varios factores como por ejemplo la presencia de un campo magnético, la viscosidad, la temperatura, la gravedad, etc.

Las ecuaciones, que rigen la mecánica de fluidos, son obtenidas al aplicar los principios de la conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen dado de fluido. Una forma de generalizarlas, para tener ecuaciones de una forma más fácil, es usando el teorema de transporte de Reynolds y el teorema de Gauss (teorema de la divergencia).

Existen cuatro ecuaciones fundamentales para fluidos compresibles y viscosos, estas ecuaciones son: la ecuación de continuidad, la ecuación de estado, la ecuación de cantidad de movimiento, y la ecuación de conservación de la energía, dependiendo del problema que se desea resolver. Estas ecuaciones pueden aparecer en forma integral o en forma derivada; estas ecuaciones en su forma de ecuaciones en derivadas parciales también son llamadas ecuaciones de Navier-Stokes enfocadas en fluidos viscosos, y para fluidos no viscosos son utilizadas las ecuaciones de Euler.

De la teoría matemática de fluidos es que se derivan las ecuaciones de Navier-Stokes, para fluidos incompresibles y compresibles, agregando una nueva magnitud física, el coeficiente de viscosidad, que en muchos de los casos este coeficiente puede considerarse constante, lo cual facilita el panorama matemático.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de fluidos usuales, como el agua, el aceite o hasta el aire. Convirtiendo estas ecuaciones en un modelo básico en distintas ciencias como la aeronáutica, la meteorología, etc. El estudio matemático de las ecuaciones de Navier-Stokes es de gran dificultad, haciendo que hoy en día sigan abiertos algunos problemas matemáticos básicos.

Al aplicar los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido, es que se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes en su formulación integral. Sin embargo esta formulación resulta complicada de resolver, por esta razón es que se busca llevar estas ecuaciones a una forma que nos resulte más fácil de resolver, por lo que es conveniente llevar las ecuaciones a su formulación diferencial, esto se logra al aplicar diversos teoremas matemáticos, con lo que será más fácil resolver los problemas planteados por la mecánica de fluidos.

Estas ecuaciones, como se mencionó arriba, son: un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, y es por su complejidad que no hay una solución que sea general, tomando en cuenta esto, son estudiadas y analizadas cada una de las ecuaciones para dar solución a problemas específicos de la mecánica de

fluidos, el objetivo es simplificar estas ecuaciones para obtener un resultado de forma sencilla. Ya que no es posible alcanzar una solución analítica que sea satisfactoria, se busca obtener una solución numérica que sea lo más aceptable al resultado que se espera.

Ecuación de Continuidad de la Masa.

La masa de un medio continuo viene descrita por el conocimiento del campo densidad ρ . Si la densidad es $\rho_0(X, 0)$ en el instante inicial y ocupa un volumen V_0 y al cabo del tiempo t tiene una densidad $\rho(X, t)$ y ocupa un volumen V , resulta:

$$m = \int_{V_0} \rho_0(X, 0) dV_0 = \int_V \rho(X, t) dV. \quad (3.1)$$

Aceptamos que la masa de un medio continuo se conserva en el tiempo. Se debe quitar la derivada material de (2.1).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV &= \int_V \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \nabla \rho(x, t) \cdot \mathbf{v} \right) dV + \int_V \rho(x, t) \frac{d}{dt} (dV) \\ &= \int_V \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \nabla \rho(x, t) \cdot \mathbf{v} + \rho(x, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0. \end{aligned}$$

Esto debe ser válido para todo el sistema y para cualquier parte del mismo. Si consideramos un volumen dV , arbitrario e infinitesimal, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \nabla \rho(x, t) \cdot \mathbf{v} + \rho(x, t) \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Visto de otra forma, por el teorema de la divergencia, quedaría así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

El sistema evolucionado se dice que es incompresible si cada partícula material (cada elemento infinitesimal) de volumen no cambia su densidad, esto es si, $d\rho/dt = 0$ haciendo que la ecuación de continuidad de masa, en este sistema incompresible, quede así: $\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ la densidad, aunque sea función de punto, es en general definida positiva resultando en $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, el campo de velocidad, se dice que es solenoidal y es necesariamente de divergencia nula. Las líneas del campo de velocidad, que deben cerrarse sobre su origen o sobre ellas misma, tienen lugar sobre la superficie del contorno del medio continuo. Si la evolución de este sistema resultará en estacionaria, ρ no es función explícita de t y la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

en la que la evolución no es necesariamente solenoidal, y esto es, porque generalmente la densidad no tiene que ser independiente del punto, por ejemplo en un gas. Esto último porque el volumen de integración V_0 , $V_0 \subset \Omega$, es arbitrario.

La **ecuación de continuidad**, expresa una ley de conservación en forma matemática y es una herramienta muy útil para el análisis de fluidos que se transportan a través de tubos o ductos con diámetro variable. En estos casos, la velocidad del flujo cambia debido a que el área transversal varía de una sección del ducto a otra.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho v v \cdot n d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} \tau \cdot n d\partial\Omega + \int_{\Omega} \rho f d\Omega \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v v) = \rho f + \nabla \cdot \tau.$$

Ecuación de cantidad de movimiento, en forma integral y diferencial.

La suma de las cantidades de movimiento de un sistema aislado de dos cuerpos que ejercen fuerzas entre sí, se considera constante, independientemente de la forma en que se sumen las fuerzas. A esto se le llama *el principio de la conservación de la cantidad de movimiento*.

La *ley de conservación de la energía* constituye el primer principio de la termodinámica y afirma que la cantidad total de energía en cualquier sistema aislado (sin interacción con ningún otro sistema) permanece invariable con el tiempo, aunque dicha energía puede transformarse en otra forma de energía. En resumen, la ley de la conservación de la energía afirma que “La energía no se crea ni se destruye sólo se transforma”.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) v \cdot n d\partial\Omega \\ = \int_{\partial\Omega} n \cdot \tau \cdot v d\partial\Omega + \int_{\Omega} \rho f \cdot v d\Omega - \int_{\partial\Omega} q \cdot n d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot (\rho v) + \nabla \cdot (\tau' \cdot v) + \rho f \cdot v + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Ecuación de la energía, forma integral y diferencial.

Sin embargo, a pesar de la contar con estas ecuaciones, en forma Integral y diferencial, no es posible obtener una solución analítica general, sólo en casos muy específicos o con algún tipo particular de fluido; es entonces que el recurrir al análisis numérico nos ayuda a discernir una solución.

3.1 Ecuaciones de Navier-Stokes en variables primitivas

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido newtoniano, y son un sistema que se deduce, a partir de la aplicación de la segunda ley de Newton, de igualar la aceleración de las partículas a la suma de fuerzas que actúan sobre ellas: las variaciones espaciales (gradiente) de la presión, las fuerzas de rozamiento (viscosidad) y las posibles fuerzas externas como la gravitatoria. A estas ecuaciones hay que añadir la ley de conservación de la masa que implica que el campo de velocidades ha de ser de divergencia nula [2]. Desde la perspectiva de la computación, la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas no-lineales, resulta muy difícil, por lo que calcular las soluciones de estas ecuaciones requiere de especial interés puesto que son muchas las aplicaciones técnicas.

Existen diversos tipos de fluidos con propiedades diferentes que pueden ser estudiados desde la perspectiva de las matemáticas y el estudio de éstos, podría ser similar, pues de alguna manera todos son fluidos, sin embargo son estas características las que hacen que el estudio del sistema se complique; una propiedad importante de los fluidos es la viscosidad y un fluido con viscosidad pequeña tiene una gran cantidad de pequeños remolinos o vórtices en su comportamiento. Este tipo de comportamiento se vuelve caótico si el fluido presenta demasiados remolinos o vórtices provocando que su estudio se vuelva increíblemente complicado. Como ejemplos de fluidos, con este comportamiento, tenemos la atmósfera y el océano, no obstante cabe señalar que este último no se considera tan caótico como el primero, esto se debe a que el océano suele considerarse como fluido incompresible y esto reduce en gran medida las ecuaciones de estudio.

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el movimiento de los fluidos newtonianos además de gobernar los fluidos incompresibles, cuya forma explícita de la ecuación, en formulación de variables primitivas en 2-D, es:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{1}{Re}\right) \Delta u_1, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{1}{Re}\right) \Delta u_2, \quad (3.6)$$

donde u_1 y u_2 son las velocidades a lo largo de los ejes x y y respectivamente, t es el tiempo, Re es el número de Reynolds, $\frac{1}{Re}$ es la viscosidad del fluido y p es la presión que actúa sobre el fluido [18] y [22].

Estas ecuaciones son incompresibles, no estacionarias en 2-D, en esta formulación se contiene al término de la presión (3.6) y la condición de incompresibilidad en (3.4). Esto ocasiona que, con frecuencia, la solución sea difícil de calcular.

Para satisfacer la condición de incompresibilidad, lo conveniente es evitar y no utilizar la variable *presión*, una forma de lograr esto es hacer uso de una formulación alternativa de las ecuaciones de Navier-Stokes como podría ser la Función Velocidad-Vorticidad.

Obsérvese que en este nuevo sistema de ecuaciones, la ecuación de continuidad en (3.1) ha sido sustituida en (3.4) por la condición de incompresibilidad, ahora con la densidad ρ constante en espacio y tiempo.

En este sistema de fluidos bidimensional, incompresible y estacionario, la velocidad solo consta de dos componentes $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$, esto debido a la simetría del problema, quedando finalmente la ecuación (3.4).

La condición de divergencia nula $\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$ se obtiene de la hipótesis de incompresibilidad del fluido. Físicamente expresa que las deformaciones que puedan presentar distintas regiones del fluido, nunca pierden ni ganan volumen, sólo modifican su forma.

Las expresiones $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ y $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ corresponden con la variación a lo largo del tiempo de cualquier región del fluido. Es decir, dependiendo del movimiento del fluido con el que se trabaje, una región variaría su forma, las expresiones nos darían información de cómo esto va sucediendo.

El término $\left(\frac{1}{Re}\right)$ representa la viscosidad del fluido. Cuanto mayor sea esta cantidad, más viscoso será nuestro fluido, y por tanto, presentará mayor resistencia a fluir.

El gradiente de presión representa otro tipo de fuerzas que intervienen en los fluidos, el fluido busca un estado de reposo, en regiones donde la presión sea más baja, esto es posible por la intervención de estas fuerzas.

La variable *presión*, en las ecuaciones complicaría el cálculo de las mismas y resultaría difícil satisfacer la condición de incompresibilidad, es por eso, que en este proyecto de tesis, se utilizarán las ecuaciones de Navier-Stokes en su formulación velocidad-vorticidad las cuales darán solución en el caso no estacionario de un fluido viscoso (se toma la viscosidad como constante), incompresible e isotérmico con geometría bidimensional). Para determinar la solución numérica se considera el método de diferencias finitas para discretizar y solucionar las ecuaciones diferenciales parciales acopladas al sistema.

3.2 Formulación Velocidad-Vorticidad

Ahora describiremos brevemente la deducción de las ecuaciones para la formulación Velocidad-Vorticidad.

Sea $\Omega \subset R^N$ ($N = 2,3$) la región de un flujo inestable de un fluido viscoso e incompresible y Γ su frontera (con $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n, \Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset$). Este tipo de fluidos dependientes del tiempo son gobernados por las ecuaciones no dimensionales en $\Omega \times (0, T), T > 0$ y están definidas por:

$$\mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.7a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.7b)$$

Estas son las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma de variables primitivas. Al igual que las ecuaciones anteriores (3.4), (3.5) y (3.6), aparecen los mismos elementos, escritos en una forma más compacta, aparece el vector \mathbf{u} que es la velocidad, p para la presión, el parámetro Re que es el número de Reynolds y \mathbf{f} que se considera como la concentración de fuerzas externas.

Para obtener un solución única en una región delimitada por Ω deben proporcionarse condiciones iniciales y de frontera, es decir $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ en Ω y para las instancias $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ en Γ , respectivamente. Como es bien sabido, al contrario de un espacio en 3D, existe una solución única en 2D, para el problema (3.7a – 3.7b), con condiciones iniciales y de frontera, para todos los tiempos $t \geq 0$ sin importar el valor del numero de Reynolds.

Ahora bien, si tomamos de (3.7a) el rotacional de ambos lados de la ecuación obtenemos la forma no dimensional de la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ de la ecuación de transporte en $\Omega \times (0, T)$ quedando la ecuación de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\omega}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (3.8)$$

donde el vector vorticidad queda definido de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.9)$$

y la nueva \mathbf{f} es la rotacional de la anterior.

Si tomamos la rotacional de la ecuación (3.9) y usamos la condición de incompresibilidad en (3.7b), por la identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = -\nabla^2 \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a})$, aplicando Poisson obtenemos la ecuación de la velocidad como:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad (3.10)$$

Las ecuaciones de Navier–Stokes en su formulación Velocidad-Vorticidad se definen por las ecuaciones (3.8) y (3.10), obteniendo tres ecuaciones para el vector velocidad $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y tres ecuaciones para el vector vorticidad $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en coordenadas Cartesianas. En general estas ecuaciones podrían manejarse para flujos en 3D, no obstante en este proyecto de tesis, únicamente se trabajo con flujos en 2D.

Lo anterior puede ser fácilmente comprobado, para la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$, con la ecuación de transporte en $\Omega \times (0, T), \Omega \subset R^2$ y está dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = f, \quad (3.11)$$

donde, al restringir (3.9) a 2D, obtenemos la siguiente ecuación.

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (3.12)$$

y a partir de (3.10), con Poisson, obtenemos dos ecuaciones para los componentes de la velocidad y quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\nabla^2 u_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (3.13a)$$

$$\nabla^2 u_2 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (3.13b)$$

Es así como las ecuaciones (3.8) y (3.10) se reducen a un sistema escalar de tres ecuaciones en 2D: una de la forma (3.8) para ω dada por (3.11) y dos de la forma (3.10) para u_1 y u_2 definidas por (3.13a) y (3.13b) respectivamente, relacionando una con otra por medio de la ecuación (3.12) y las condiciones de frontera para ω en (3.11) también deben obtenerse para cada uno de los elementos del vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

Esto se puede ver en el sistema escalar en 2D (ecuaciones (3.11) - (3.13)), teniendo la ventaja de la llamada formulación función corriente-vorticidad, ya que la velocidad \mathbf{u} es calculada explícitamente. En la actualidad, la función corriente ψ es trivial su solución al calcular la ecuación de Poisson con ω calculada en (3.11) como el lado derecho de la ecuación, esto es:

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad (3.14)$$

obtenido de la definición de ω dada por (3.12) y la definición de ψ en términos de u_1 y u_2 y nos dan como resultado las siguientes ecuaciones:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (3.15)$$

el cual sigue de (3.7b): la ecuación debe ser complementada por la condición de frontera ψ implicada en cualquier \mathbf{u} . Las ecuaciones (3.15) y (3.11) dan la llamada formulación función corriente – vorticidad de las ecuaciones de Navier - Stokes en 2D.

Otra aproximación para la solución de (3.13a) y (3.13b) es también incluirlas dentro de un problema dependiente del tiempo, en $\Omega \times (0, T)$.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nabla^2 u_1 = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nabla^2 u_2 = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (3.16b)$$

y observamos el estado estable del fluido, para cualquier, t aproximándose a más infinito, para la práctica es utilizada t muy grande. A pesar de la continuidad, es decir, la condición de incompresibilidad (3.13b), suponemos que se cumple para obtener la ecuación (3.10) y, por ende, las ecuaciones (3.13a) y (3.13b), no hay garantía de que deba mantenerse la diferencia de las ecuaciones.

Definimos

$$D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0. \quad (3.17)$$

Para diferenciar las ecuaciones que aparecen en (3.13a) y (3.13b) con respecto a x y y respectivamente, y sumando las ecuaciones resultantes, tenemos lo siguiente:

$$\nabla^2 D = 0. \quad (3.18)$$

Entonces, por el principio del máximo, si $|D| = 0$ en la frontera sigue esa continuidad, $D = 0$, se mantiene en el dominio entero del fluido. Como puede verse en seguida, los experimentos numéricos son dados para el llamado problema de la cavidad; en el que se satisface la continuidad.

Para este proyecto de tesis, el problema de vórtice de Taylor es definido en la región $0 \leq x, y \leq 2\pi$ donde las condiciones iniciales se definen por:

$$u_1(x, y, 0) = -\text{Cos}(x) \cdot \text{Sen}(y) \text{ y } u_2(x, y, 0) = \text{Sen}(x) \cdot \text{Cos}(y),$$

posteriormente son calculadas las condiciones de frontera para esté problema, más adelante se definirá de manera formal este problema así como las

condiciones que se deberán cumplir. Para el problema de la cavidad cuadrada, donde las ecuaciones (3.7a) y (3.7b) son el conjunto en el dominio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ y la condición de frontera, en términos de \mathbf{u} es definida por $\mathbf{u} = (1, 0)$ al moverse la frontera y $\mathbf{u} = (0, 0)$ en el resto. Así, los componentes de esta relación están dados por las condiciones de frontera para las ecuaciones (3.13a) y (3.13b). Para obtener u_1 y u_2 consideramos las condiciones de frontera ω para resolver la vorticidad en la ecuación (3.11) para continuar con (3.12) y éstas son dadas por:

$$\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 0, \omega = \frac{\partial u_2}{\partial x}, & \text{en } \Gamma_{x=0} \\ u_1 = 0, u_2 = 0, \omega = \frac{\partial u_2}{\partial x}, & \text{en } \Gamma_{x=1} \\ u_1 = 0, u_2 = 0, \omega = -\frac{\partial u_1}{\partial y}, & \text{en } \Gamma_{y=0} \\ u_1 = 1, u_2 = 0, \omega = \frac{\partial u_1}{\partial y}, & \text{en } \Gamma_{y=1} \end{cases} \quad (3.19)$$

En suma, $\omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x})$ que denota la condición inicial para la vorticidad que, para (3.9), tiene que satisfacer $\omega_0 = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$ si $\mathbf{u}_0 = (u_1, u_2)$ es la velocidad inicial.

Cabe mencionar que en esta formulación, velocidad – vorticidad, las ecuaciones resultantes no dependen de la presión p . Sin embargo se debe señalar un dominio ó región validos puesto que los modelos de las ecuaciones matemáticas se deben de estudiar en regiones del espacio dado, para nuestro caso en un plano, ya que se trata de un modelo bidimensional, además se requieren conocer las condiciones de frontera, para entender cómo se comporta el fluido estudiado en la frontera del dominio, para poder así resolver completamente nuestro modelo.

4. MÉTODO NUMÉRICO Y RESULTADOS NUMERICOS

A continuación vamos a resolver un problema no estacionario, entonces, para la discretización temporal se utiliza un esquema de aproximación de segundo orden:

$$f_t(x, (n+1)\Delta t) = \frac{3f^{n+1} - 4f^n + f^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (4.1)$$

donde $x \in \Omega$, $n \geq 1$ y Δt denota el paso de tiempo y $\omega^r \equiv \omega(x, r\Delta t)$ para una función suficientemente suave [17].

Al aplicar (3.11) y (3.13) en forma implícita se obtiene el sistema semi-discreto en tiempo implícito, en Ω .

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1^{n+1} = -\frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y}, \\ \nabla^2 u_2^{n+1} = \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x}, \\ \alpha \omega^{n+1} - \nu \nabla^2 \omega^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \omega^{n+1} = f_\omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde $\alpha = \frac{3}{2\Delta t}$, $f_\omega = \frac{4\omega^n - \omega^{n-1}}{2\Delta t}$ y $1/Re$ ha sido remplazado por la viscosidad cinemática ν .

Entonces a cada paso de tiempo se obtiene un sistema de ecuaciones elíptico no lineal que debe resolverse en Ω

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \nabla^2 u_2 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{bc}, \\ \alpha \omega - \nu \nabla^2 \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = f, \\ \omega = \omega_{bc}, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{en } \Gamma \\ \text{en } \Gamma \end{matrix} \quad (4.3)$$

donde \mathbf{u}_{bc} y ω_{bc} denotan las condiciones de frontera para \mathbf{u} y ω respectivamente, tomadas de (3.19). Para obtener u_1^1, u_2^1 y ω^1 en (4.2), se aplica una aproximación de Euler de primer orden para la derivada de tiempo por medio de una subsucesión con pequeños paso de tiempo para mantener una exactitud de segundo orden. Un sistema de la forma (4.3) se obtiene también si las ecuaciones (3.16a) y (3.16b) se resolvieran en lugar de las ecuaciones (3.13a) y (3.13b) después de una aproximación de la derivada de tiempo aplicando la aproximación con término adicional ∂u_1 y ∂u_2 respectivamente, en (4.1), un sistema como (4.3) también se habría obtenido.

Tomando en cuenta el sistema elíptico (4.3), además de ser no lineal es de tipo no potencial (o de transporte), es solucionado con un proceso iterativo de punto fijo.

Denotando:

$$R(\omega) \equiv \alpha\omega - v\nabla^2\omega + \mathbf{u} \cdot \nabla\omega = f, \quad \text{en } \Omega, \quad (4.4)$$

entonces, el sistema (4.3) es equivalente, en Ω , a:

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = -\frac{\partial\omega}{\partial y}, \\ \nabla^2 u_2 = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{bc}, \\ R(\omega) = 0, \omega = \omega_{bc}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{en } \Gamma \\ \text{en } \Gamma \end{array} \quad (4.5)$$

Además, (4.5) es solucionado, en el nivel de tiempo (n+1) por el proceso iterativo de punto fijo.

Con $\omega^0 = \omega^n$ dado, hasta que se resuelva la convergencia en ω .

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1^{m+1} = -\frac{\partial\omega^m}{\partial y}, \\ \nabla^2 u_2^{m+1} = \frac{\partial\omega^m}{\partial x}, \\ \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}_{bc}, \\ \omega^{m+1} = \omega^m - \rho(\alpha I - v\nabla^2)^{-1}R(\omega^m), \\ \omega^{m+1} = \omega_{bc} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{en } \Gamma \\ \text{en } \Gamma; \quad \rho > 0; \end{array} \quad (4.6)$$

entonces tomamos $(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \omega^{n+1}) = (u_1^{m+1}, u_2^{m+1}, \omega^{m+1})$.

Finalmente el sistema (4.6) es equivalente, en Ω , a:

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1^{m+1} = -\frac{\partial\omega^m}{\partial y}, \\ \nabla^2 u_2^{m+1} = \frac{\partial\omega^m}{\partial x}, \\ \mathbf{u}_{bc}^{m+1} = \mathbf{u}_{bc}, \\ (\alpha I - v\nabla^2)\omega^{m+1} = (\alpha I - v\nabla^2)\omega^m - \rho R(\omega^m), \\ \omega^{m+1} = \omega_{bc} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{en } \Gamma \\ \text{en } \Gamma. \end{array} \quad (4.7)$$

Entonces en cada una de las iteraciones se tienen que resolver *tres* problemas elípticos desacoplados asociados con operadores lineales ∇^2 y $\alpha I - v\nabla^2$ debe notarse que la parte no simétrica para ω se ha pasado al lado derecho, como dato

conocido, gracias al proceso iterativo. Por consiguiente, la solución del sistema original, en cada iteración de cada nivel de tiempo, nos lleva a la solución estándar de problemas elípticos lineales simétricos.

Cabe mencionar, que existen programas hechos para dar una solución eficiente a este tipo de problemas, ejemplo de ello es el programa Fishpack [5] el cual resuelve los sistemas lineales elípticos por medio de un método iterativo de reducción cíclica, dicho programa fue el utilizado en este proyecto de tesis.

4.1 Dos Problemas Prueba

En este proyecto de tesis se trabajaron con dos problemas prueba, esto con el fin de comparar los resultados numéricos que se obtuvieron, el primero es el problema de vórtice de Taylor y el segundo el problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizante, a continuación se explicarán detalladamente estos problemas prueba.

4.1.1 Primer problema prueba: El Vórtice de Taylor

Recientemente, la simulación numérica de un flujo complejo en estructuras multi-escaladas juega un papel muy importante en el diseño de problemas. La turbulencia es un ejemplo común. El flujo viscoso en el espacio anular entre dos cilindros en una rotación circular concéntrica resulta muy interesante al cortar el flujo sin un gradiente de presión en la dirección media del flujo. Existen algunos casos en los que el interior del cilindro rota principalmente, mientras que el exterior se mantiene en reposo. En estos flujos, existe un flujo laminar asimétrico básico mejor conocido como flujo de Couette. El flujo de Couette se vuelve inestable, cuando la velocidad de rotación del interior del cilindro es aumentada, más allá de un cierto valor crítico. La inestabilidad conduce a la transición de un vórtice en un flujo laminar, conocido como vórtice de Taylor.

El flujo viscoso anular entre dos cilindros concéntricos con el interior en rotación, no sólo es de gran importancia para la mecánica y la ingeniería química, sino también para la física de fluidos, por que el flujo puede ofrecer la llave a la comprensión del problema de la transición de la turbulencia.

Básicamente, este problema va a describir la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones para el caso de un fluido no estacionario, incompresible e isotérmico, en donde el tiempo t aparece de forma explícita.

Para determinar una solución a la discretización de las ecuaciones diferenciales, se hará uso de una técnica de diferencias finitas. El problema de vórtice de Taylor lo trabajaremos como un fluido delimitado por su frontera. En [22], [25] y [26] se da la solución explícita del problema. Para nuestro caso particular se considera un fluido no-estacionario, viscoso incompresible e

isotérmico, esto con el fin de solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes en su formulación velocidad-vorticidad.

Para comenzar, debemos considerar el problema del vórtice de Taylor [19] definido por las ecuaciones de Navier-Stokes en variables primitivas y dadas para la región $0 \leq x, y \leq 2\pi$. Las siguientes son las condiciones iniciales en la formulación de variables primitivas.

$$\begin{aligned} u_1(x, y, 0) &= -\cos(x) \cdot \sin(y) \\ u_2(x, y, 0) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para este problema contamos con la solución exacta para las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= -\cos(x) \cdot \sin(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ u_2(x, y, t) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

En la formulación función velocidad - vorticidad es necesario obtener las condiciones iniciales para el problema del vórtice de Taylor, por lo que resulta conveniente tomar estas condiciones de (4.8) y a partir de ellas derivar considerando las ecuaciones (3.12), (3.15) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, 0) = \cos(x) \cdot \cos(y) + C_1 \\ u_2(x, y, 0) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, 0) = \cos(y) \cdot \cos(x) + C_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que pueden ser tomadas como cero.

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\cos(x) \cdot \cos(y), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \cos(x) \cdot \cos(y) \\ \omega_0(x, y, 0) &= -2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

Es necesario calcular las condiciones de frontera para el Vórtice de Taylor en función Velocidad-Vorticidad esto se logra a partir de las condiciones de frontera en la formulación en variables primitivas que dando de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(0, y, t) = -\text{Sen}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}}, \quad u_1(2\pi, y, t) = -\text{Sen}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ u_2(0, y, t) = 0, \quad u_2(2\pi, y, t) = 0 \end{array} \right. \quad \forall t \geq 0, \text{ Periódica en } x.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x, 0, t) = 0, \quad u_1(x, 2\pi, t) = 0 \\ u_2(x, 0, t) = \text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}}, \quad u_2(x, 2\pi, t) = \text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \end{array} \right. \quad \forall t \geq 0, \text{ Periódica en } y.$$

Para la Formulación función velocidad-vorticidad se dan las condiciones de frontera para este problema, las cuales nos ayudarán a dar solución a nuestro problema, en estas ecuaciones las velocidades u_1 y u_2 están representadas por $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ y $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ respectivamente, así mismo las condiciones que se presentan ya fueron evaluadas con anterioridad por lo que estas condiciones quedan definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, y, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, y, t) = C_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(2\pi, y, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}(2\pi, y, t) = C_2 \end{array} \right.$$

donde C_1 y C_2 son constantes y si $C_1 = C_2$, $\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(2\pi, y, t)$. $\forall t \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_2 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0, t) = -\text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \Rightarrow -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0, t) = -\int \text{Sen}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} dx + C_1(t) \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0, t) = \text{Cos}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} + C_1(t) \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 2\pi, t) = -\text{Sen}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \Rightarrow -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 2\pi, t) = -\int \text{Sen}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} dx + C_2(t) \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 2\pi, t) = \text{Cos}(x) e^{\frac{-2t}{Re}} + C_2(t) \end{array} \right.$$

donde $C_1(t)$ y $C_2(t)$ son constantes y además se tiene que si se cumple la siguiente igualdad $C_1(t) = C_2(t)$, $\Rightarrow -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, 0, t) = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, 2\pi, t)$. \mathbf{u} es periódica en x y y , $\forall t \geq 0$.

Las condiciones de Frontera de la función Vorticidad se obtienen de (3.12), (3.13a) y (3.13b) y están dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(0, y, t) = 2 \cdot \text{Cos}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ \omega(2\pi, y, t) = 2 \cdot \text{Cos}(y) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ \omega(x, 0, t) = 2 \cdot \text{Cos}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \\ \omega(x, 2\pi, t) = 2 \cdot \text{Cos}(x) \cdot e^{\frac{-2t}{Re}} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

4.1.2 Tablas De Resultados Y Gráficas De La Solución Del Vórtice De Taylor

Aquí se muestran las tablas de resultados y las gráficas que se obtuvieron de la solución de este problema, cabe mencionar que tanto las tablas como las gráficas presentan variaciones importantes como el número de Reynolds Re y el tiempo t , donde se evaluaron distintos valores para Re en diferentes intervalos de tiempo. Estas tablas de resultados y las gráficas nos muestran la solución analítica y la solución numérica, así como una tabla extra que nos muestra el porcentaje de error.

Tablas de Resultados:

Función Corriente			
Reynolds	Tiempo	Min.	Max.
100	10	-0.818730753055888	0.818730753077982
100	1000	-2.061153622382938E-009	2.061153622438558E-009
3200	10	-0.993769490596578	0.993769490623395
3200	1000	-0.535261428504546	0.535261428518990
7500	10	-0.997336885703588	0.997336885730501
7500	1000	-0.765928338343980	0.765928338364649

Tabla 1: Solución exacta valores mínimos y máximos del Vórtice de Taylor

Función Corriente			
Reynolds	Tiempo	Min.	Max.
100	10	-0.8187307530	0.818730760
100	1000	-2.061153623072801E-009	2.061153640977130E-009
3200	10	-0.993769491	0.993769499
3200	1000	-0.535261428510145	0.535261433159724
7500	10	-0.997336885	0.997336894
7500	1000	-0.765928338347398	0.765928345000678

Tabla 2: Solución Numérica valores mínimos y máximos del Vórtice de Taylor

Reynolds	Tiempo	Error Relativo
100	10	3.207252399142954e-008
100	1000	3.192999914807766e-008
3200	10	3.190903024944430e-008
3200	1000	3.167780632146758e-008
7500	10	3.166967169761883e-008
7500	1000	3.167314295814883e-008

Tabla 3: Porcentaje de error

Como podemos observar en la última tabla, se presentan la viscosidad, representada por el número de Reynolds, la cual se evalúa en distintos intervalos de tiempo, el error que ofrece esta solución es menor al 1 % con respecto al presentado por otros autores [17], [19], [22], [23] y [38], lo que se considera una buena solución.

A continuación se muestran las gráficas de los resultados obtenidos. Estas gráficas se presentan en 2-D así como en 3-D, esto con el fin de notar que la diferencia entre ellas no se hace notoria al graficar los contornos y como ya se mencionó antes se compara la solución analítica y la solución numérica

Gráficas de la Solución Analítica.

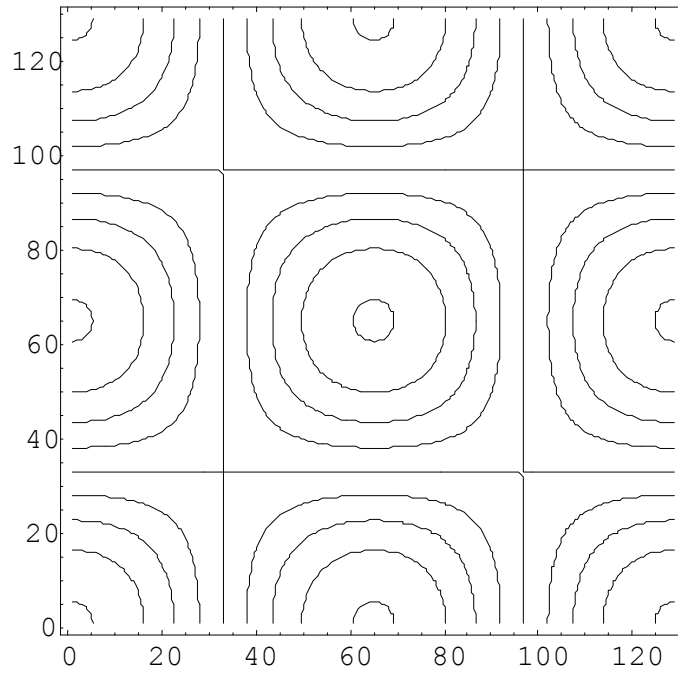


Figura 4.1. Solución analítica. Líneas de Corriente para $Re=100$, $t=10$ y $h=1/128$

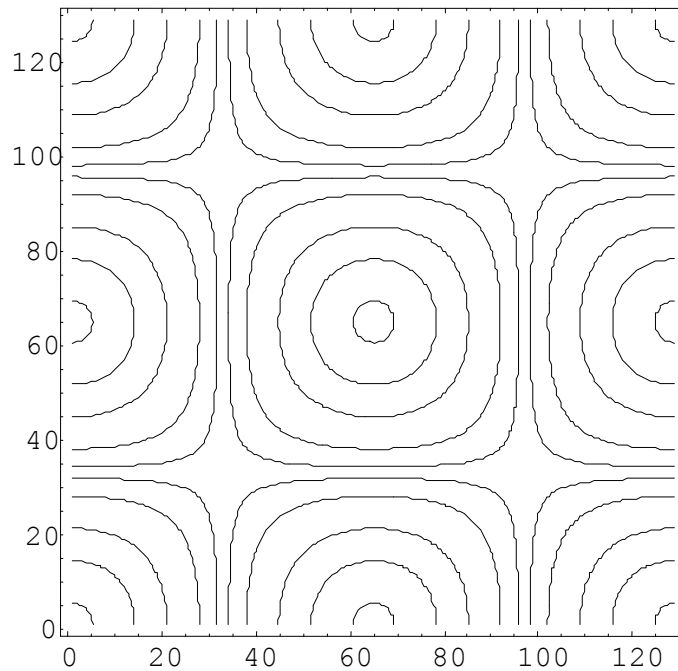


Figura 4.2. Solución analítica. Isocontornos de la Función Vorticidad para $Re=100$, $t=10$ y $h=1/128$

Gráficas de la Solución Numérica.

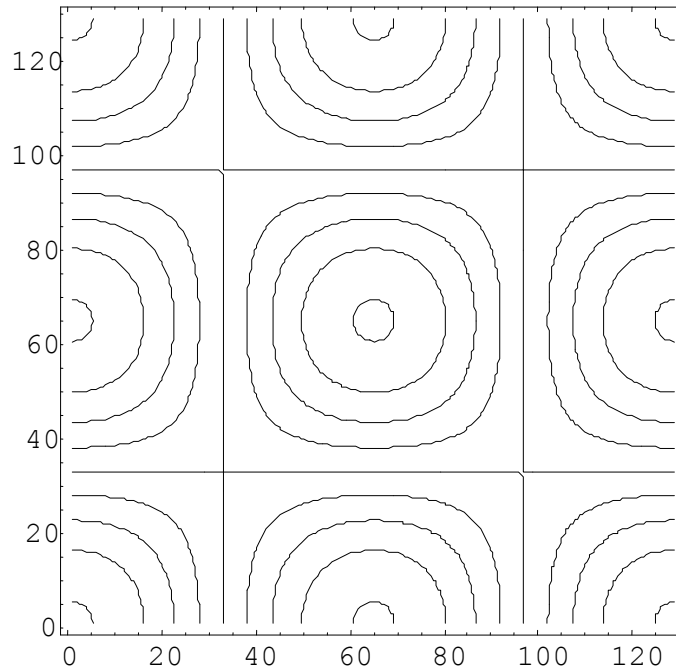


Figura 4.3. Solución numérica. Líneas de Corriente para $Re=100$, $t=10$ y $h = 1/128$

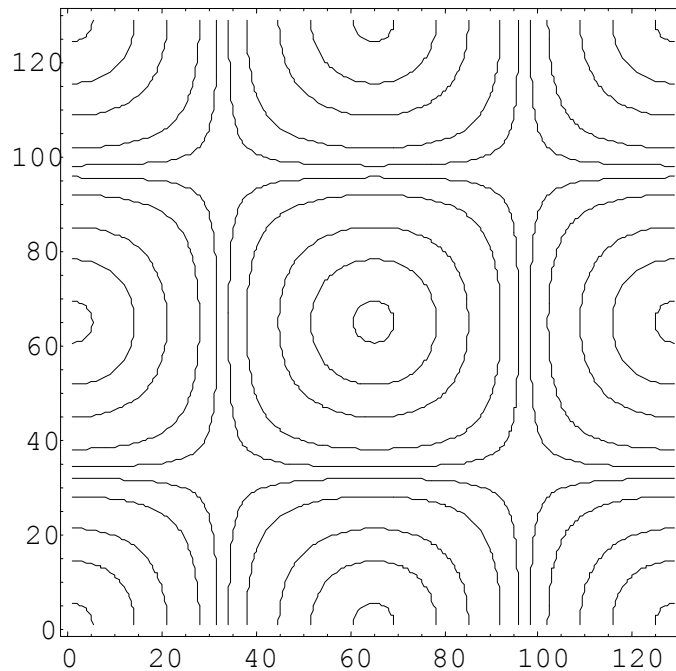


Figura 4.4. Solución numérica. Isocontornos de la Función Vorticidad $Re=100$, $t=10$ y $h = 1/128$

La solución numérica aquí mostrada es obtenida de nuestro programa, es fácil apreciar que las gráficas de la solución numérica y analítica son muy similares, es por esta razón que se presentarán gráficas en 3-D, las cuales mostrarán con

mayor claridad el desempeño del flujo a lo largo del tiempo, así como las variaciones en el número de Reynolds.

Gráficas en 3-D para $Re = 100$, $t = 10$ y 1000 y malla: 128.

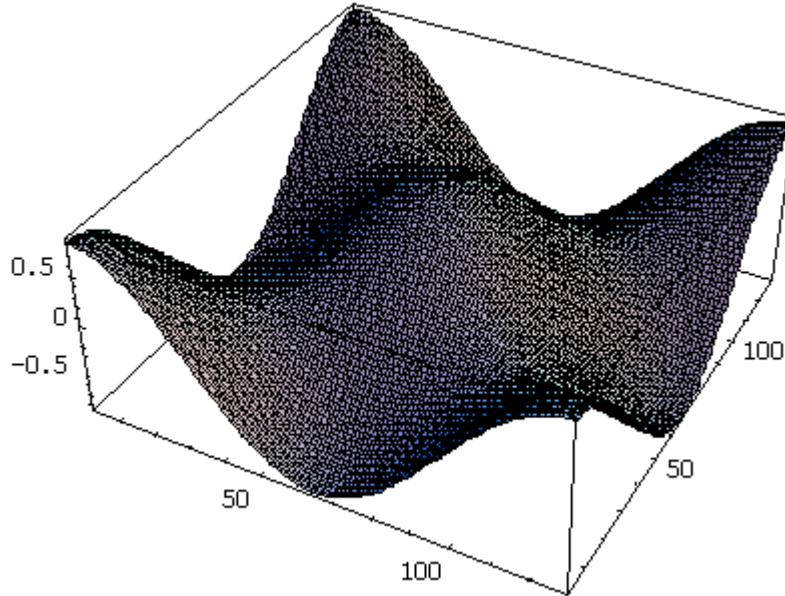


Figura 4.5. Líneas de Corriente para $Re = 100$, $t = 10$ y $h = 1/128$

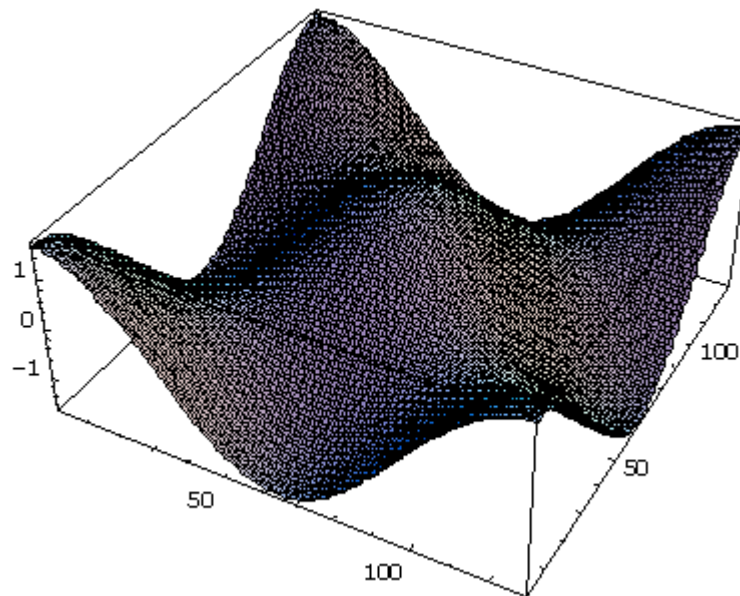


Figura 4.6. Isocontornos de la Función Vorticidad para $Re = 100$, $t = 10$ y $h = 1/128$

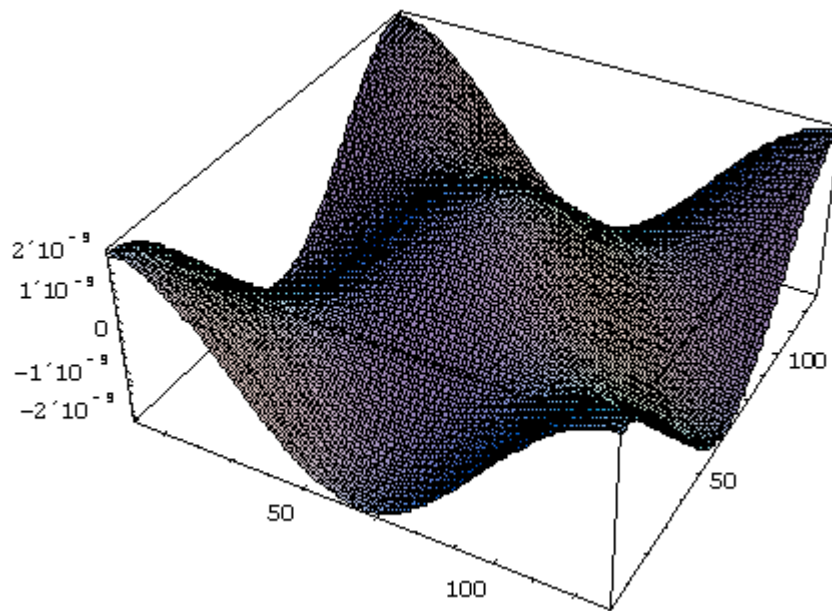


Figura 4.7. Líneas de Corriente para $Re = 100$, $t = 1000$ y $h = 1/128$

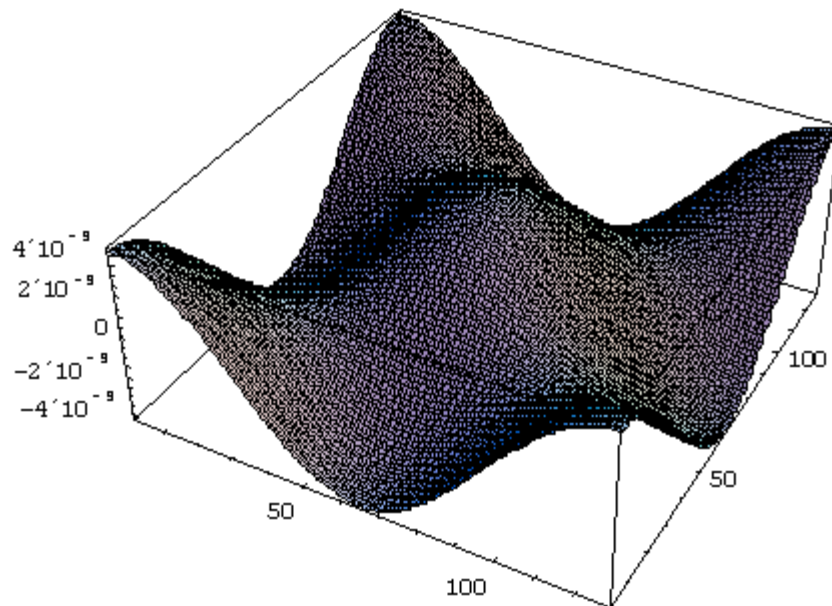


Figura 4.8. Isocontornos de la Función Vorticidad para $Re = 100$, $t = 1000$ y $h = 1/128$

Gráficas en 3-D para $Re = 3200$, $t = 10$ y 1000 y malla: 128.

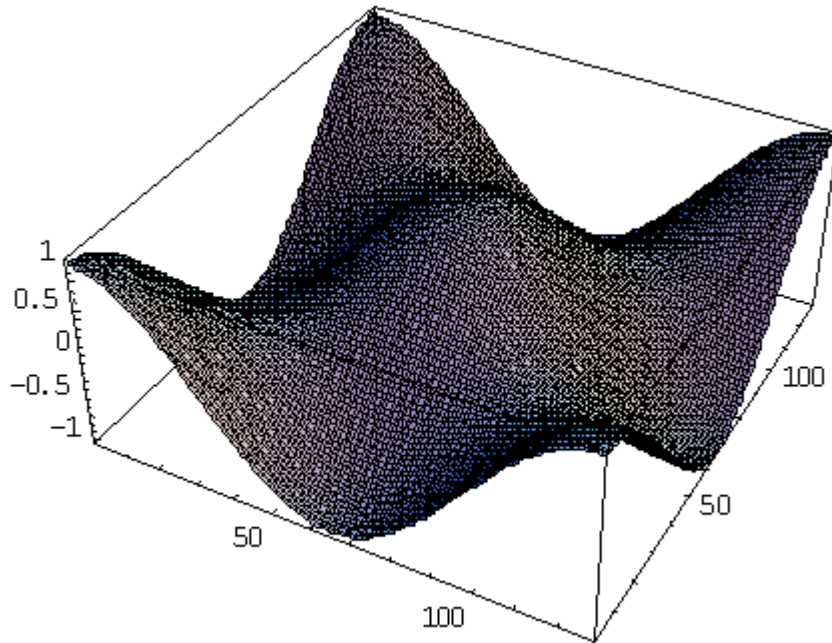


Figura 4.9. Líneas de Corriente para $Re = 3200$, $t = 10$ y $h = 1/128$

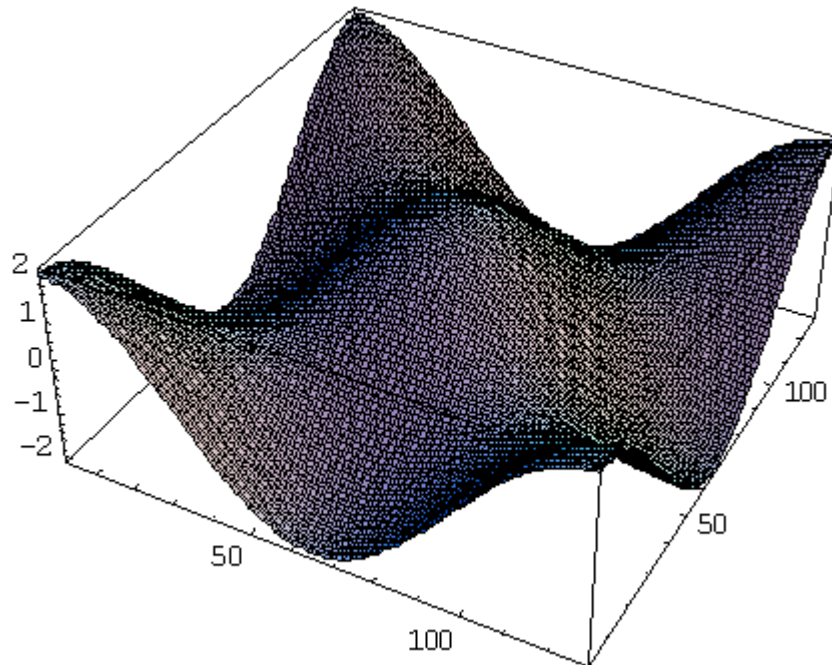


Figura 4.10. Isocontornos de la Función vorticidad para $Re = 3200$, $t = 10$ y $h = 1/128$

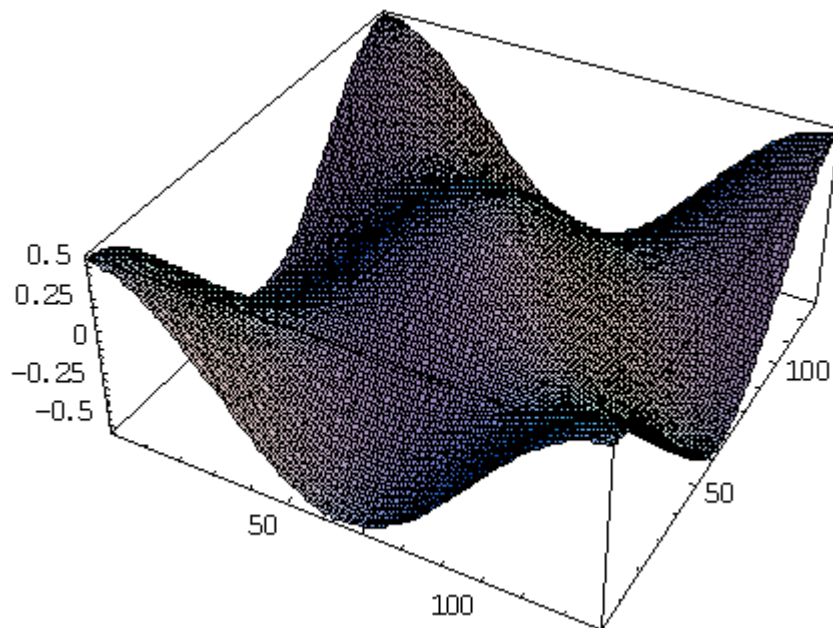


Figura 4.11. Líneas de Corriente para $Re=3200$, $t=1000$ y $h=1/128$

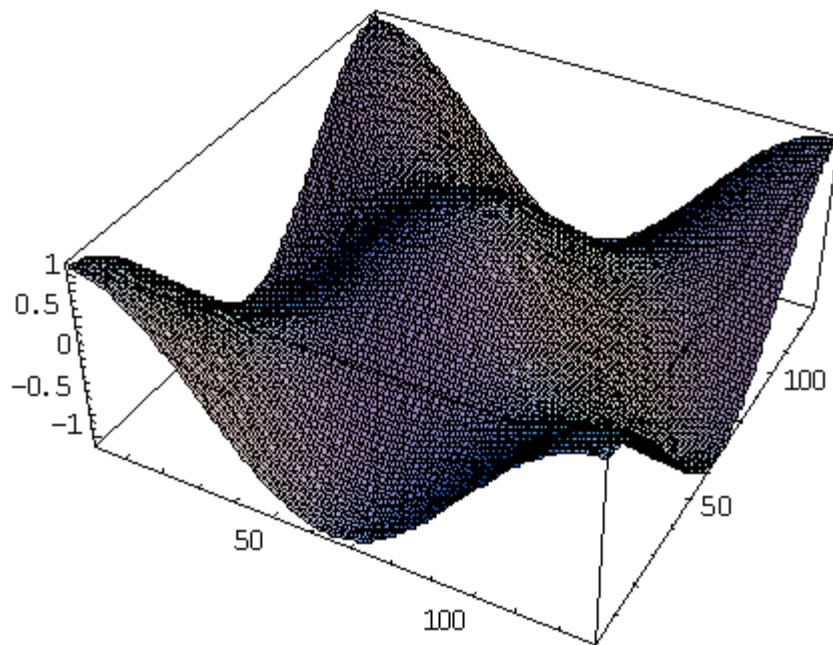


Figura 4.12. Isocontornos de la Función vorticidad para $Re=3200$, $t=1000$ y $h=1/128$

Gráficas en 3-D para $Re = 7500$, $t = 10$ y 1000 y malla: 128.

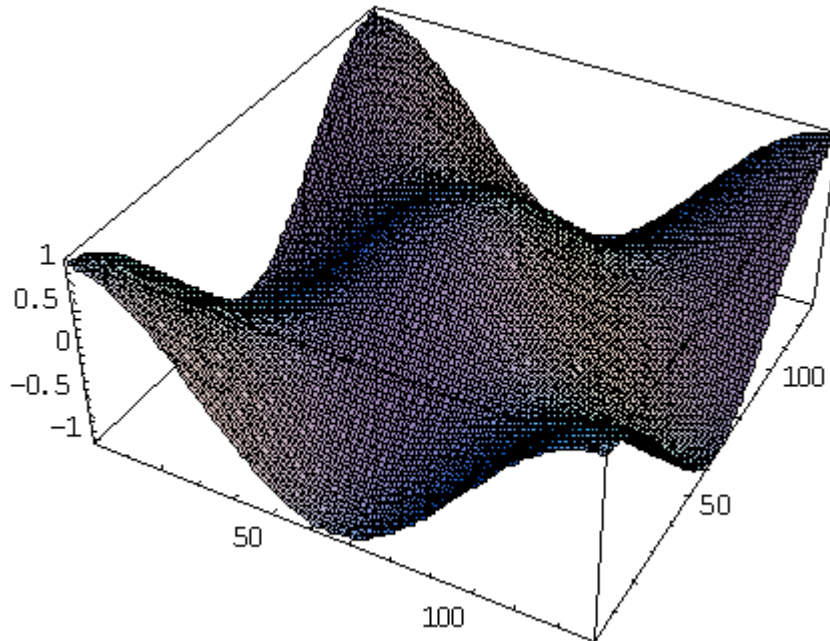


Figura 4.13. Líneas de Corriente para $Re = 7500$, $t = 10$ y $h = 1/128$

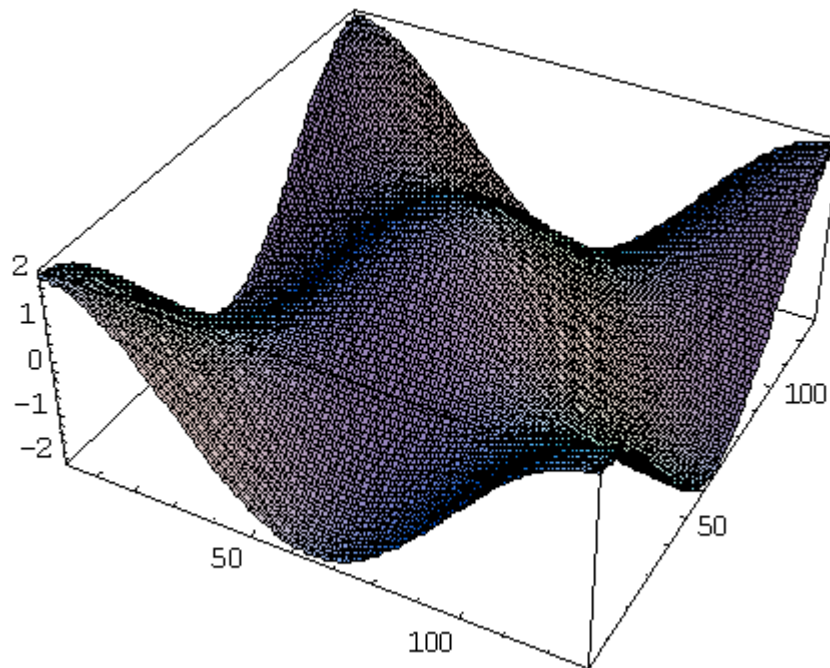


Figura 4.14. Isocontornos de la Función vorticidad para $Re = 7500$, $t = 10$ y $h = 1/128$

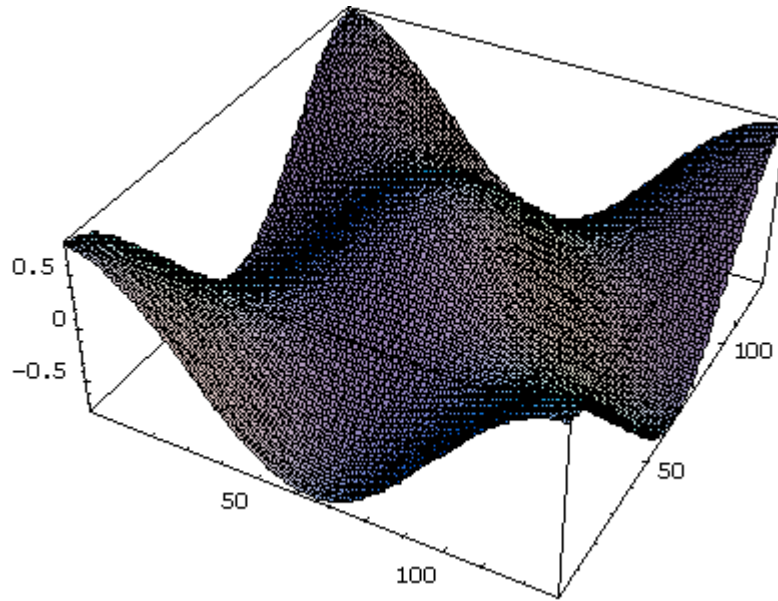


Figura 4.15. Líneas de Corriente para $Re = 7500$, $t = 1000$ y $h = 1/128$

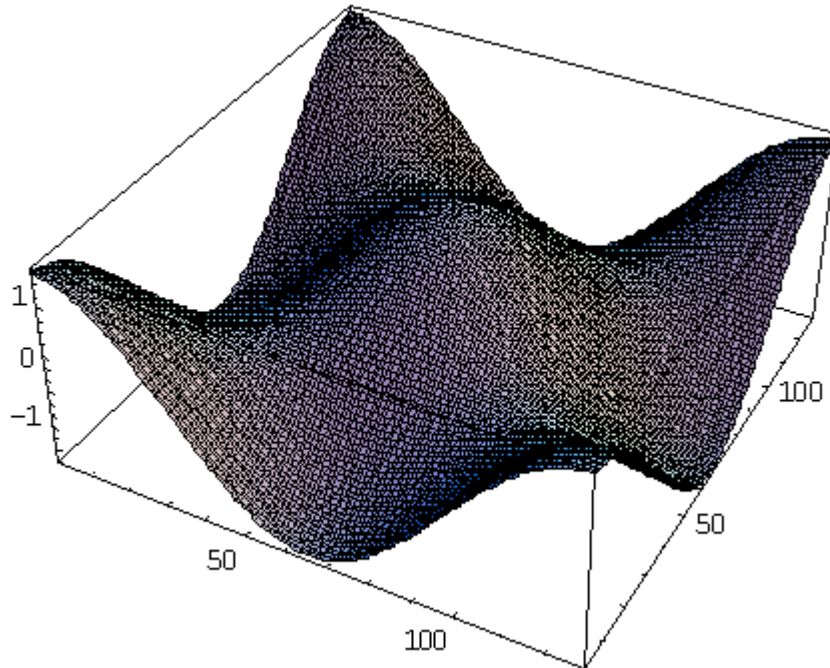


Figura 4.16. Isocontornos de la Función vorticidad para $Re = 7500$, $t = 1000$ y $h = 1/128$

En las gráficas en 3-D se aprecia de mejor forma la diferencia entre la solución numérica y la analítica, ya que se ve de manera clara los puntos máximos y mínimos en cada gráfica.

4.1.3. Segundo problema prueba: El problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizante.

Toca el turno de estudiar el segundo problema prueba, llamado el problema de la cavidad cuadrada. Este origina el problema de la recirculación por lo que su estudio es de gran interés entre los matemáticos.

Como se observa en [22], el problema de la cavidad cuadrada intenta estudiar un fluido dentro de una cavidad (Ver fig. 4.17); supóngase que se tiene un fluido que se mueve de derecha a izquierda de forma homogénea en un canal que presenta una hendidura o cavidad cuadrada. Para saber cómo es el movimiento del fluido dentro de esta cavidad, es necesario resolver las ecuaciones de Navier-Stokes dentro de este dominio.

Es preferente suponer que el fluido tiene una estructura bidimensional y así tomar un conjunto del plano, que suele ser dado por $[0,1] \times [0,1]$, el cuadrado unitario.

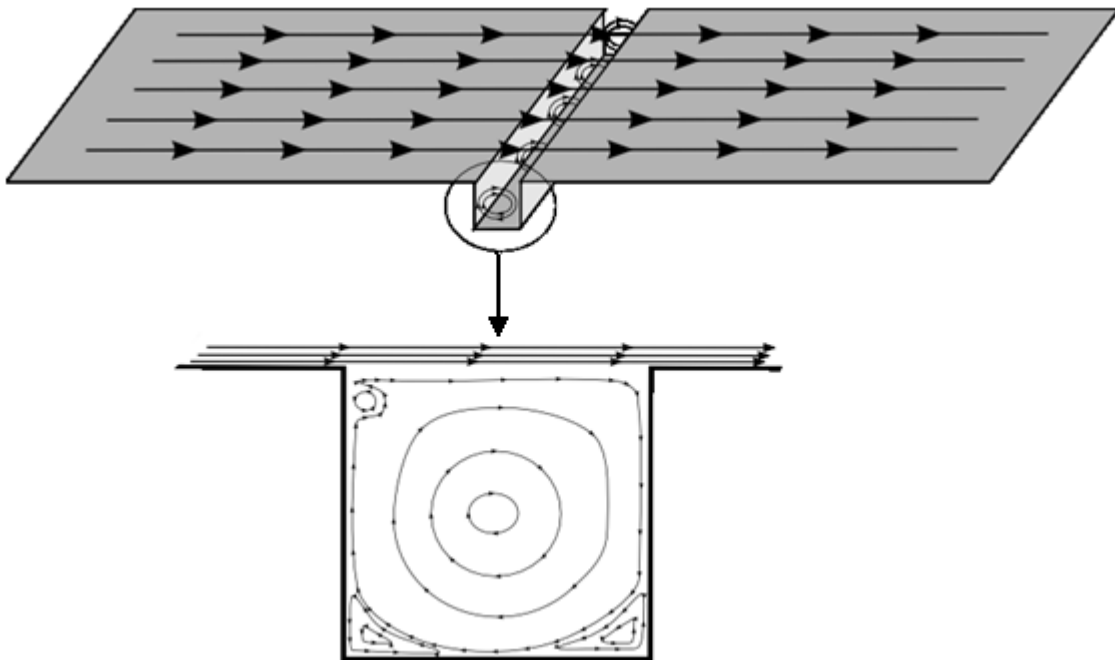


Figura 4.17. Representación del problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizante.

Nos interesa conocer el comportamiento del fluido en la frontera del dominio, región de estudio, y es necesario indicar el comportamiento de éste en el modelo. En este caso en particular, nos importa conocer como se mueve el fluido en los cuatro bordes de esta cavidad, y saber si hay bordes fijos en los que el flujo está en reposo o si éste se está moviendo al encontrarse en un borde que también está en movimiento. (Ver fig. 4.17)

En resumen, describir de manera completa el estudio de este problema, nos conduce a que tendríamos que resolver el siguiente conjunto de ecuaciones:

El problema de la cavidad cuadrada queda definido de la siguiente manera:

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset R^2$$

Aquí Ω representa la región de estudio para nuestro fluido y las condiciones de frontera están dadas por $u = g$ sobre Γ , con

$$g = \begin{cases} (1,0) \text{ sobre } \Gamma_0 = \{(x,1): 0 < x < 1\}, t > 0, \\ (0,0) \text{ sobre } \Gamma - \Gamma_0, t > 0, \end{cases}$$

en donde Γ es la frontera de Ω .

La condición inicial:

$$(u(x, y, 0), v(x, y, 0)) = (0,0) \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

y deberá satisfacer la condición de frontera.

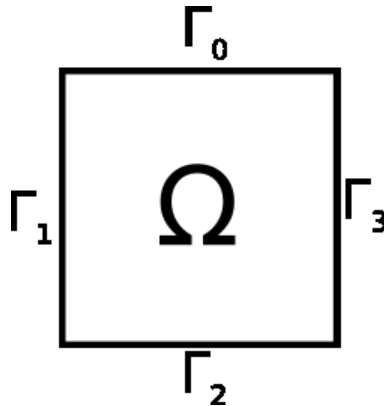


Figura 4.18. Región de estudio Ω y frontera Γ .

4.1.4 Gráficas de la solución del problema de la Cavidad Cuadrada con tapa deslizable

Al igual que con el problema prueba anterior, aquí también se presentan gráficas de la solución del problema de la cavidad cuadrada, en estas gráficas se observan los resultados que se obtuvieron con diferentes valores para el número de Reynolds.

En los experimentos que se realizaron, se usó el número de Reynolds que va desde $Re = 400$ hasta $Re = 3500$ con $\Delta t = 0.01$ y el tamaño de paso en la malla queda definido por h .

Gráficas de la solución con $Re = 400$, $t = 200$ y malla: 100

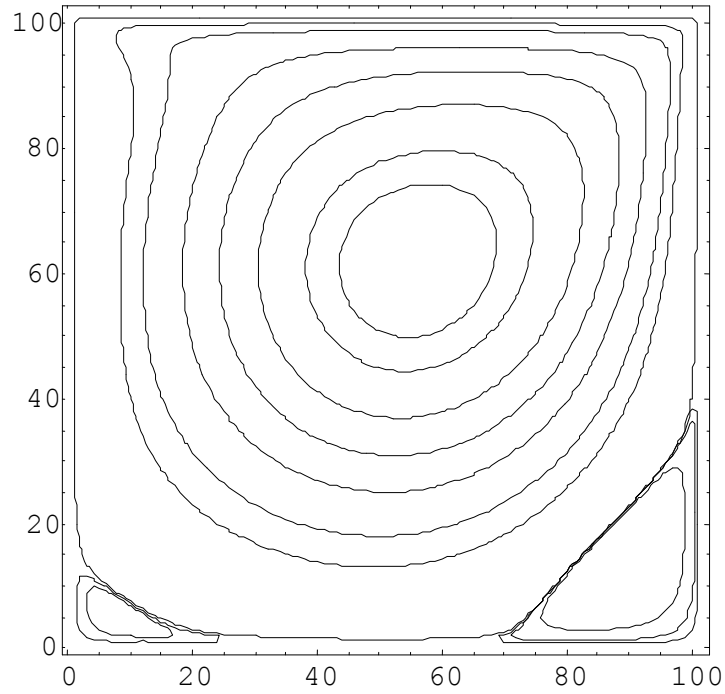


Figura 4.19. Líneas de Corriente para $Re = 400$, $\Delta t = 0.01$, $t = 200$ y $h = 1/100$.

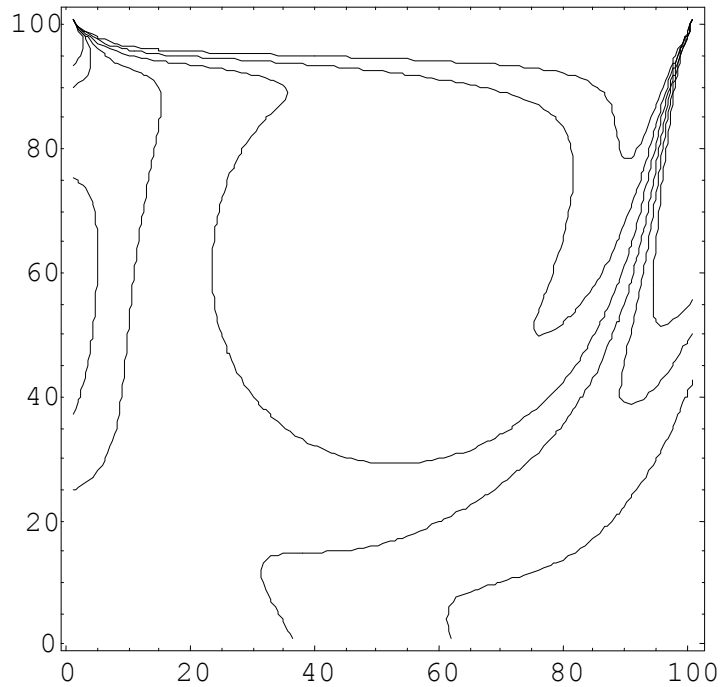


Figura 4.20. Isocontornos de la Función Vorticidad para $Re = 400$, $\Delta t = 0.01$, $t = 200$ y $h = 1/100$.

Gráficas de la solución con $Re = 1000$, $t = 200$ y malla: 128

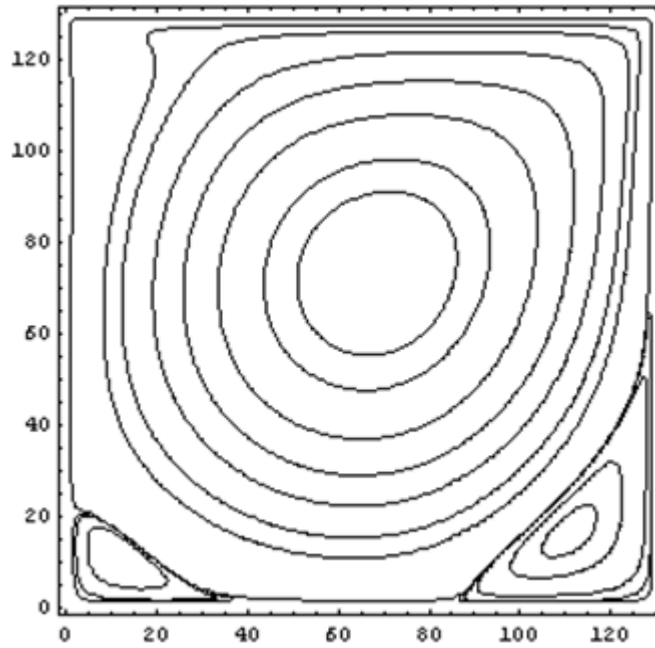


Figura 4.21. Líneas de Corriente para $Re = 1000$, $\Delta t = 0.01$, $t = 200$ y $h = 1/128$.

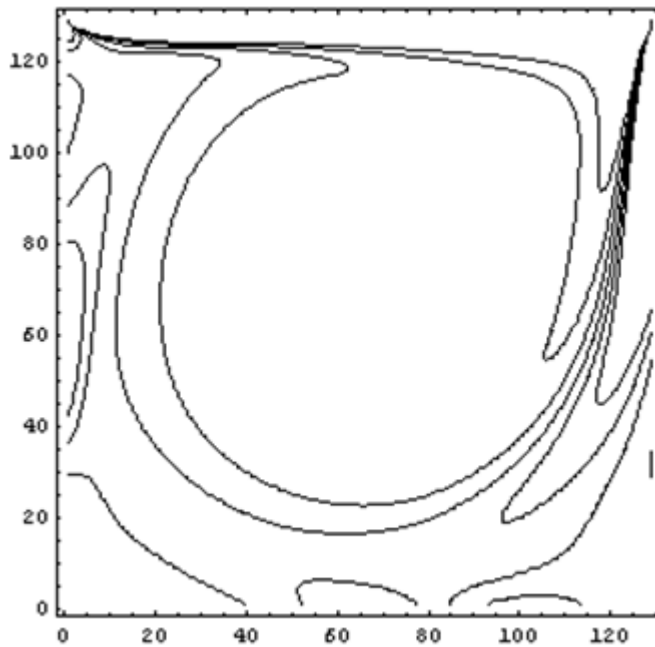


Figura 4.22. Isocontornos de la Función Vorticidad para $Re = 1000$, $\Delta t = 0.01$, $t = 200$ y $h = 1/128$.

Gráficas de la solución con $Re = 3200$, $t = 200$ y malla: 256

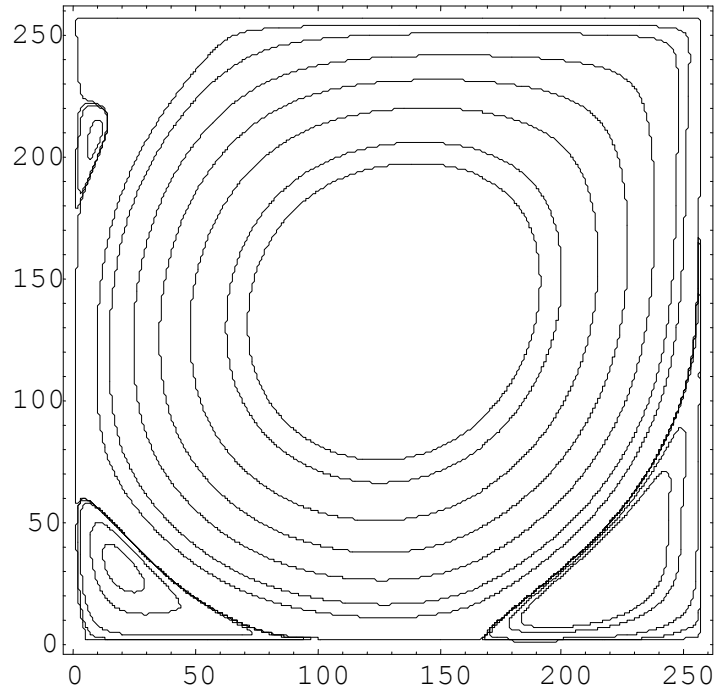


Figura 4.23. Líneas de Corriente de la Función Corriente para $Re = 3200$, $\Delta t = 0.01$, $t = 200$ y $h = 1/256$.

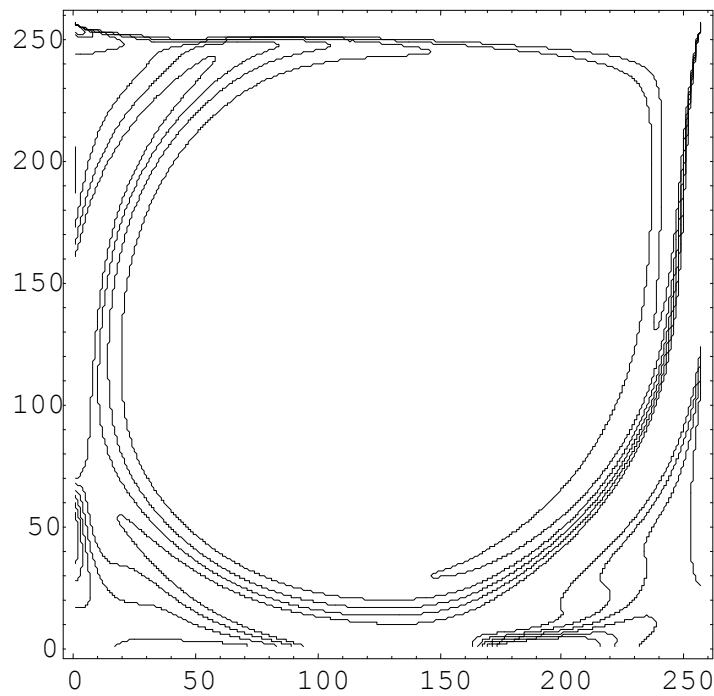


Figura 4.24. Isocontornos de la Función Vorticidad para $Re = 3200$, $\Delta t = 0.01$, $t = 200$ y $h = 1/256$.

En estas gráficas se pueden observar los cambios producidos por los distintos valores que se manejaron para el número de Reynolds y el tamaño de las mallas, estos resultados ofrecen una buena aproximación con respecto a los resultados obtenidos por otros autores [18] y [42], las figuras 4.19 y 4.20 se compararon con los resultados reportados en [18] y las figuras 4.21, 4.22, 4.23 y 4.24 fueron comparados con los resultados obtenidos en [42], las dos primeras figuras con $Re = 1000$. Se observa que el número de sub-vórtices se incrementa conforme el tiempo aumenta hasta alcanzar el estado estacionario.

5. CONCLUSIONES

En este proyecto de tesis se experimentó con dos problemas pruebas, vórtices de Taylor y el problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizable, estos problemas son gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes en un espacio en 2- D y su dominio es rectangular, obteniéndose una solución numérica. Ambos problemas prueba fueron planteados para fluidos viscosos, incompresibles e isotérmicos, para el primer problema, el vórtice de Taylor, se tomó en cuenta la dependencia del tiempo sobre el fluido, mientras que para el segundo problema, de cavidad cuadrada con tapa deslizable, se buscó converger a un estado estacionario. Los números de Reynolds que se utilizaron para el problema de Vórtice de Taylor fueron desde $Re = 100$ hasta $Re = 7500$, mientras que para el problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizable se usaron $Re = 400$ hasta $Re = 3200$, el número de Reynolds marcó una relación directa con el aspecto final de las gráficas, que fueron importantes en los resultados de estos experimentos. El método utilizado ofreció una buena solución numérica para la función corriente, por medio de la formulación vorticidad-velocidad de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para el problema prueba del vórtice de Taylor, los resultados que se obtuvieron fueron muy buenos y el error entre ambas soluciones fue pequeño, lo que resulta en una solución bastante aceptable. La diferencia entre las soluciones, para los distintos tiempos, es más notoria en la gráficas 3-D que se presentaron en la sección 4, puesto que en ellas se aprecia las diferentes escalas que se obtienen al variar el número de Reynolds con respecto al tiempo.

En cuanto al problema de la cavidad cuadrada con tapa deslizable, las soluciones obtenidas fueron buenas, Se trabajó con números de Reynolds razonablemente grandes y mallas finas, obteniendo muy buenos resultados con respecto a investigaciones anteriores, En la viscosidad del fluido, el número de Reynolds juega un papel importante ya que entre mayor sea este número, la viscosidad es menor y el número de vórtices aumenta; esto es bastante visible en las gráficas presentadas, también en ellas se puede ver que cuando la viscosidad es mayor el flujo tiene menos movimiento por lo que el número de vórtices se reduce debido a mayores fuerzas de rozamiento existentes en el fluido.

Finalmente en la solución de estos problemas, se logró al unir diversas materias con la computación con fin de dar una buena solución y presentar distintos resultados a los ya mostrados con anterioridad por otros autores, las soluciones aquí presentadas se asemejan bastante a las obtenidas con la formulación corriente-vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes en [17] y [21]. Por esta razón es que considero importante el acoplar diversas materias en un fin común. En este proyecto de tesis fue importante el uso de la física, las matemáticas y la computación, el resultado se alcanzó a partir de un programa que realizaba una simulación numérica, obtenida de un modelo matemático que fue desarrollado de leyes de la física por todos conocidas.

REFERENCIAS

- [1] Martín Rivas, *Elementos de Física de los Medios Continuos*, Departamento de Física Teórica, Universidad Politécnica de Valencia.
- [2] Xavier Ayneto Gubert, *Mecánica del medio continuo en la ingeniería*, Editorial UPC, Barcelona 2006.
- [3] G.E. Mase, *Teoría y problemas de mecánica del medio continuo*, (Colección Schaum) McGraw Hill (1977).
- [4] A.L. Fetter y J.D. Walecka, *Theoretical mechanics of particles and continua*, McGraw Hill, New York (1980).
- [5] G.F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw Hill, Madrid, 1993.
- [6] A.M. Criado Pérez, *Fundamentos de Mecánica*, Universidad de Sevilla (1979).
- [7] Juan Luis Vázquez, *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica de Fluidos*, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, España, 2003.
- [8] Crespo Martínez, *Mecánica de Fluidos*, A. Thomson Editores España 2006.
- [9] Merle C. Potter, David C. Wiggert, *Mecánica de Fluidos*, Thomson Learning Ibero 2006.
- [10] Hughes W., Brighton J. *Fluid Dynamics*. Schaums Outline Series McGraw Hill 1991.
- [11] Sherman F. *Viscous Flow*. McGraw Hill 1990.
- [12] Jorge Cossio, *Contribución al estudio de las ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo Elíptico*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Vol. 28 (106) (2004), 135-145.
- [13] R. Fernández Fera, *Mecánica de fluidos*, Universidad de Málaga 2001.
- [14] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Reverté, Barcelona, 1991.
- [15] Diego Córdoba, Marco Antonio Fontelos y José Luís Rodrigo, *Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas*, La gaceta de la RSME, Vol. 8.3 (2005), Págs. 53–83.

- [16] González Gutiérrez, Leo Miguel, *Integración de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método de los elementos finitos y el método de las características. Aplicaciones a casos con superficie libre*, Mayo 2001.
- [17] Nicolás Alfredo; Bermúdez Blanca, *Viscous incompressible flows by the velocity-vorticity Navier-Stokes equation.*, CMES vol. 20 no. 2 pp. 73-83, 2007 Tech Science Press.
- [18] Nicolás A, Bermudez B. *2D Incompressible Viscous Flows at Moderate and High Reynolds Numbers*. Computer Modeling in Engineering and Sciences 2004; 6(5):441-451.
- [19] Kalita, Dass & Nidhi 2000 *Efficient Transient Navier – Stokes Solver* Int. J. Numer. Meth. Fluids; 00. 1 – 6.
- [20] Rivas Nieto, A., *Mecánica de fluidos: Análisis bidimensional de flujo de fluidos*, Escuela Superior de Ingenieros Industriales de San Sebastián-Universidad de Navarra, España 2002.
- [21] Duran Anaya Luis Raúl 2008, *Aspectos Físicos y Numérico-Computacionales de algunos problemas de la Mecánica de Fluidos*. Tesis para la obtención del grado de Ingeniero, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- [22] Bermúdez Juárez Blanca del Carmen M^a. *Un esquema Numérico para Flujos Isotérmicos y Térmicos*. Tesis para la obtención del grado de Doctor en Ciencias, Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa, división de ciencias Básicas e Ingeniería.
- [23] Bermudez, B.; Nicolas, A. 1999: *An Operator Splitting numerical Scheme for Thermal/Isothermal Incompressible Viscous Flows*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 29,397 – 410.
- [24] Báez E, Bermúdez B, Nicolás A. Convección natural en medios porosos y libres: simulación numérica. *Revista Mexicana de Física* 2004; 50(1):36-48.
- [25] Anson D. K., Mullin T. & Cliffe K. A. 1988 *A numerical and experimental investigation of a new solution in the Taylor vortex problem* J. Fluid Mech. Pag. 475 – 487.
- [26] Tadashi Hodohara, Junichi Matsumoto and Mutsuto Kawahara: *Analysis of the Taylor Vortex flow*, Civil Engineering, Chuo University, Tokyo, Japan.
- [27] Hernán Estrada Bustos, *Física computacional*, Unibiblos, Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia.
- [28] I.S. Sokolnikov, *Análisis tensorial*, Index, Madrid (1979).

- [29] Leutloff D., Srivastava R. C. (Eds) *Computational Fluid Dynamics*. Springer 1995.
- [30] Landau LD, Lifshitz EM. *Fluid Mechanics* (2nd edn). Pergamon Press: New York, 1989.
- [31] Foias C, Manley O, Rosa R, Teman R. *Navier-Stokes Equations and Turbulence*. Cambridge University Press, 2001.
- [32] Josep M. Bergadá Graño, *Mecánica de fluidos: Problemas resueltos*, Editorial UPC, Barcelona 2006.
- [33] Griebel M., Dornseifer T., Neunhoeffler T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation 1998.
- [34] Tannehill J.C., Anderson D. A., Pletcher R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis 1997.
- [35] Wong S. *Computational Methods in Physics and Engineering*. World Scientific 1992.29
- [36] DeVries P. *A First Course in Computational Physics*. Wiley 1994.
- [37] Adams, J.; Swarztrauber, P; Sweet, R. 1980: FISH-PACK: A Package of Fortran Subprograms for the Solution of Separable Elliptic PDE's, The National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, USA.
- [38] Goyon, O. (1996): High-Reynolds number solution of Navier-Stokes equations using incremental unknowns. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 130, 319-335.
- [39] Sweet R. A cyclic reduction algorithm for solving block tridiagonal systems of arbitrary dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1977; 14:706.6
- [40] Mohammadi B, Pironneau O. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. Wiley: New York, 1994.4
- [41] Burden, R.L. y Faires D., *Análisis numérico*, Grupo Editorial Íbero América 1985.13
- [42] Koonin S. Meredith D. *Computational Physics*. Addison Wesley 1990.24
- [43] M.W. Hirsch, S. Smale, *Ecuaciones Diferenciales ordinarias, sistemas dinámicos y algebra lineal*, Alianza Ed., Madrid, 1983.