



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

“ENCRIPCIÓN ÓPTICO-DIGITAL DE IMÁGENES”

TESIS PROFESIONAL

SOMETIDA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:

MERCEDES PEREZ MENDOZA

ASESOR DE TESIS:
Dr. ALFONSO PADILLA VIVANCO

COASESOR DE TESIS:
Dra. BÁRBARA EMMA SÁNCHEZ RINZA

PUEBLA, PUE. AGOSTO 2009.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres por su apoyo incondicional durante el transcurso de la preparación de este trabajo, su dedicación y desvelos que realizaron para que este proyecto se finalizara.

A mis hermanos por la motivación que me dieron durante el transcurso de este trabajo para terminar este proyecto.

A los amigos que me estuvieron recordando que los proyectos cuando se empiezan deben tener una finalización.

A los asesores que dedicaron parte de su valioso tiempo para realizar este trabajo que llevo tiempo y dedicación por ambas partes.

A la vida por brindarme la oportunidad de terminar algo que empecé, así y podre abrir otras puertas en mi vida, después de cerrar este ciclo.

OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS DEL PROYECTO.

Objetivos generales.

Implementar y programar un sistema controlado por computadora para la encriptación y desencriptación de imágenes digitales. La implementación cae en el contexto de la transformada fraccional de Fourier y el procesamiento óptico-digital de imágenes.

Objetivos específicos.

Se implementara en sus versiones óptica y digital la transformada fraccional de Fourier como parte de un algoritmo de encriptación de imágenes digitales binarias y en niveles de gris. El algoritmo deberá ser capaz de llevar a cabo la operación inversa de desencriptación de la información.

OJETIVOS GENERALES Y ESPECIFICOS.....	2
INTRODUCCIÓN.....	6
1. ANÁLISIS DE FOURIER.....	8
1.1 Introducción.....	8
1.2 Las transformadas unidimensionales.....	8
1.3 Transformada de la Función Gaussiana.....	11
1.4 Las transformadas bidimensionales.....	12
1.5 La transformada de una función cilíndrica.....	13
1.6 La lente como sistema transformador de Fourier.....	15
1.7 Transformada Fraccional de Fourier.....	17
2. PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES.....	19
2.1 Introducción.....	19
2.2 Conceptos básicos de imágenes digitales.....	19
2.3 Técnicas de procesado de imagenes.....	22
2.3.1 Convolución.....	23
2.3.2 Suavizado.....	28
2.3.3 Filtros Pasa Baja.....	29
2.3.4 Filtro de Media.....	30
2.3.5 Filtros de Pasa Alta.....	31
2.3.6 Detección de bordes.....	32
2.3.7 Eliminación de ruido.....	33
2.3.8 Filtrado de Mediana.....	35
2.3.9 Dilatación/Erosión.....	36
2.3.10 Filtrado frecuencia.....	37
2.3.11 Visualización del espectro.....	37
2.3.12 Filtro Ideal.....	38
2.4 Encriptación de imágenes digitales.....	41
2.4.1 Criptografía y criptoanálisis.....	41
2.5 Aspectos que definen una comunicación a través de Internet.....	42
3. ANÁLISIS DE LA ENCRIPCIÓN DE IMÁGENES DIGITALES USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y SU FRACCIONAL.....	44
3.1 Introducción.....	44
3.2 Series de Fourier	44
3.3 Transformada Discreta de Fourier	46
3.4 Transformada de Fourier	52
3.5 Transformada Inversa de Fourier	53
3.6 Propiedad del escalamiento de Fourier.....	54
3.7 Serie Hermitegauss 2D.....	55
3.8 Análisis de la transformada Fraccional de Fourier.....	57
3.8.1 Transformada Fraccional de Fourier.....	58
3.8.2 Transformada Discreta Fraccional de Fourier.....	59
4. ALGORITMO DE LA ENCRIPCIÓN DE IMÁGENES USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y SU FRACCIONAL.....	61
4.1 Introducción.....	61
4.2 Algoritmo de la transformada de Fourier	61
4.2.1 Resultados.....	67
4.3 Algoritmo de encriptación y desencriptación de la FRT (Transformada Fraccional de Fourier).....	69
4.3.1. Encriptación.....	69
4.3.2. Desencriptación.....	72
4.3.3. Resultados.....	80
CONCLUSION.....	82
BIBLIOGRAFÍA.....	84

INDICE DE FIGURAS

1. ANÁLISIS DE FOURIER.....	8
1.1 La luz difractada por una transparencia en el punto focal.....	15
1.2 Transformada de la función del triángulo es la función sinc.....	16
2. PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES.....	19
2.1 Representación de de ventana y mascara de convolución.	25
2.2 Tratar bordes de la Imagen	26
2.3 Imagen a envolver.....	28
2.4 Pasa Baja.....	29
2.5 Smooth.....	29
2.6 Mascara de tamaño 3x3.....	30
2.7 Pasa Alta1, Pasa Alta 2, Pasa Alta3.....	32
2.8 Filtrado de mediana.....	35
3. ANÁLISIS DE LA ENCRIPCIÓN DE IMÁGENES DIGITALES USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y SU FRACCIONAL.....	44
3.1 Cuadro obtenido en Mathcad	47
3.2 Figura obtenida mediante Fourier	48
3.3 Triángulo bidimensional y su grafica obtenidas mediante Mathcad.....	49
3.4 Triángulo bidimensional y su grafica ,Transformada Discreta.....	50
3.5 Semicírculo bidimensional y su grafica obtenidas mediante Mathcad.....	51
3.6 Semicírculo bidimensional y su grafica, Transformada Discreta.....	51
3.7 Espectro de Fourier $F(u,v)$	52
3.8 Imagen de Lena.....	52
3.9 Transformada de Fourier Lena.....	53
3.10 Transformada Inversa de Fourier.....	54
3.11 Propiedad de escalamiento de Fourier.....	54
3.12 Series Hermitegauss 2D A.....	56
3.13 Series Hermitegauss 2D B.....	56
3.14 Series Hermitegauss 2D C.....	57
4. ALGORITMO DE LA ENCRIPCIÓN DE IMÁGENES USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y SU FRACCIONAL.....	61
4.1 Representación Óptica para la obtención de la transformada de Fourier.....	67
4.2 Lena y su resultado de la Transformada de Fourier.....	68
4.3 Inversa de la Transformada de Fourier para obtener la imagen original de Lena.....	68
4.4 Imagen de Lena y su encriptación bajo el método de la Fraccional de Fourier.....	80
4.5 Proceso de descriptacion de la imagen de Lena.....	81

INTRODUCCIÓN

La seguridad es un factor importante en el avance de la tecnología de la información. Durante la década pasada, diversos sistemas de encriptación de imágenes óptico-digitales han sido propuestos. Entre ellos los más comunes son la codificación de la fase aleatoria en el dominio de Fourier y más recientemente en el dominio de la transformada fraccional. Sin embargo, recientemente notamos que las transformadas de Fourier fraccionales pueden dar diferentes formas de encriptar la información bidimensional.

La aplicación de métodos para seguridad constituye una alternativa atractiva por el uso de procedimientos electrónicos debido a la operación en paralelo y producto espacio ancho de banda alto de los métodos ópticos. Estos son especialmente útiles para el procesamiento de información tales como imágenes y hologramas. En general, las técnicas de seguridad óptico-digitales involucran un procesador óptico que encripta, desencripta o autentiza la información codificada como una imagen bidimensional.

Se realiza un análisis de Fourier que proporciona una forma de tratar los procesos ópticos en términos de frecuencia espaciales. La principal motivación es desarrollar la comprensión de la forma en que los sistemas ópticos procesan luz para formar imágenes. Se desea saber sobre amplitudes y fases luminosas que alcanza el plano de la imagen. Los métodos de Fourier son especialmente adecuados para esta labor por tal motivo se realiza el análisis de Fourier, dentro del análisis se abarcan los siguientes puntos: la transformada unidimensional, transformada de la función Gaussiana, transformada bidimensionales, transformada de una función cilíndrica, la comprensión de un lente como transformador de Fourier, y un ligero análisis de la transformada fraccional de Fourier.

Otro análisis que se realiza es el procesamiento de imágenes digitales, donde se hace énfasis referente a los conceptos referentes al procesamiento de imágenes digitales, la cual consiste en enredar un mensaje con una fórmula matemática irreversiblemente complicada donde la persona que tenga clave pueda decodificar el mensaje.

Se da una leve descripción las distintas técnicas de procesamiento como: filtros lineales y no lineales, de rango, dilatación, erosión, entre otros.

Se hace necesario crear sistemas que permitan proteger la información, para tal propósito se utiliza la transformada de Fourier por la complejidad al encriptar y desencriptar imágenes digitales, se propone desarrollar un análisis de Fourier ya con imágenes que van desde una figura geometría hasta una imagen más compleja, con el propósito de ver comportamiento de dichas funciones matemáticas sobre las figuras e imagen digital.

Se debe recordar que la FFT (Transformada Fraccional de Fourier) no es una transformada diferente de la DFT (Transformada Discreta Fourier), pero sí una familia de algoritmos más eficientes para lograr la transformada de datos. Generalmente cuando uno acelera un algoritmo, esta aceleración viene con un coste, con la FFT (Transformada Fraccional de Fourier), el coste es complejidad. Hay complejidad en la ejecución de la contabilidad y del algoritmo. Los ahorros de cómputo, sin embargo, no se realizan a expensas de la exactitud

La transformada de Fourier fraccional ha sido empleada exitosamente en el estudio de sistemas ópticos, como óptica de Fourier, con aplicaciones al procesamiento de información óptica, permitiendo una formulación en esta área en forma mucho más general.

Uno de los postulados para operar con la FRT es el siguiente:

$$\mathfrak{F}^a[\mathfrak{F}^b f] = \mathfrak{F}^a \mathfrak{F}^b f = \mathfrak{F}^b \mathfrak{F}^a f = \mathfrak{F}^{a+b} f$$

en donde a y b son constantes arbitrarias.

La motivación de esta tesis es la de aplicar la FRT para la encriptación de imágenes óptico digitales. Desde el punto de vista matemático, las FRTs tienen diferentes tipos de definición matemática y esto permite representar a una señal en diferentes formas.

CAPITULO I

ANÁLISIS DE FOURIER

1.1 Introducción

El análisis de Fourier proporciona una forma excelente de tratar los procesos ópticos en términos de frecuencias espaciales, debido a su potencia matemática real.

La principal motivación es desarrollar la comprensión de la forma en que los sistemas ópticos procesan la luz para formar imágenes. Queremos saber todo sobre amplitudes y las fases de las ondas luminosas que alcanzan el plano de la imagen. Los métodos de Fourier son especialmente adecuados para esta labor así que primero ampliaremos el tratamiento de las series de Fourier. Varias transformadas son particularmente útiles en el análisis y estas son las primeras que consideremos. Entre ellas se encuentran la función Delta, que en lo que sigue será utilizada para representar una fuente puntual de luz. Como responde un sistema óptico a un objeto que está compuesto de un gran número de fuentes puntuales que son funciones delta. La relación entre el análisis de Fourier y la difracción de Fourier se investiga a lo largo de la discusión, El capítulo terminará con una vuelta al problema de la evaluación de las imágenes esta vez desde una perspectiva diferente, aunque relacionada: el objeto se trata no como una colección de fuentes puntuales sino como un difusor de ondas planas.

1.2 Las transformadas unidimensionales

Una función de una dimensión de alguna variable del espacio $f(x)$ puede expresarse como una combinación lineal de un número finito de contribuciones armónicas.

$$f(x) = \frac{1}{\Pi} \left[\int_0^{\infty} A(K) \cos Kx dK + \int_0^{\infty} B(K) \sin Kx dK \right] \quad (1.2.1)$$

Los factores de peso que determinan la importancia de las diversas contribuciones de frecuencia espacial angular (K), es decir $A(K)$ y $B(K)$, son transformadas de Fourier del coseno y del seno dadas por:

$$A(K) = \int f(x') \cos Kx' dx'$$

y

(1.2.2)

$$B(K) = \int f(x') \operatorname{sen} Kx' dx'$$

respectivamente. La cantidad x' es una variable muda sobre la cual se lleva a cabo la integración de manera que ni $A(K)$ ni $B(K)$ son funciones explícitas de x' y la selección del símbolo usado para indicar no es importante. Las transformadas del seno y el coseno pueden consolidarse dentro de una sola expresión exponencial compleja ecuación 1.2.3 como sigue: substituyendo la ecuación 1.2.1 en la ecuación 1.2.2 obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\infty} \cos Kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos Kx' dx' dK + \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} Kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \operatorname{sen} Kx' dx' dK \quad (1.2.3)$$

Ahora como $\cos(x'-x) = \cos Kx \cos Kx' + \operatorname{sen} Kx \operatorname{sen} Kx'$ esto puede describirse como:

$$f(x) = \frac{1}{\Pi} \int \left[\int f(x') \cos K(x'-x) dx' \right] dK \quad (1.2.4)$$

Ya que se está buscando una representación exponencial, obsérvese que:

$$f(x) = \frac{1}{\Pi} \int \left[\int f(x') \operatorname{sen} K(x'-x) dx' \right] dK \quad (1.2.5)$$

Porque el factor entre paréntesis es una función impar de K . Al sumar estas dos últimas expresiones ecuación 1.2.4 y 1.2.5, se obtiene la forma compleja de la integral de Fourier.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{iKx'} dx' \right] e^{-iKx} dK \quad (1.2.6)$$

Por lo tanto podemos escribir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(K) e^{-iKx} dK \quad (1.2.7)$$

Siempre que

$$F(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iKx} dx \quad (1.2.8)$$

La función $F(K)$ es la transformada de Fourier la cual se indica simbólicamente por la ecuación 1.2.9:

$$F(K) = \mathfrak{F}\{f(x)\} \quad (1.2.9)$$

Precisamente como $F(K)$ es la transformada de $f(x)$ y $f(x)$ es la transformada inversa de Fourier de $F(K)$ o simbólicamente se muestra en la ecuación 1.2.10:

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(K)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f(x)\}\} \quad (1.2.10)$$

y, $f(x)$ y $F(K)$ se denomina frecuentemente par de transformadas de Fourier.

Si f fuera una función del tiempo en vez del espacio, únicamente tendríamos que reemplazar x por t (ec.1.2.11) y entonces K , la frecuencia espacial angular, por ω ecuación 1.2.12, la frecuencia temporal angular, para obtener el par de transformadas oportuno en el dominio temporal, es decir:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (1.2.11)$$

$$y \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.2.12)$$

Cabe mencionar que si escribimos $f(x)$ como una suma de funciones, su transformada será evidentemente la suma de las transformadas de los componentes individuales de las funciones.

1.3 Transformada de la Función Gaussiana

Examinaremos la función de probabilidad gaussiana ecuación 1.3.1:

$$f(x) = C e^{-ax^2} \quad (1.3.1)$$

donde $c = \sqrt{a/\pi}$ y a es una constante.

Su transformada de Fourier se obtiene evaluando la ecuación 1.3.2:

$$F(K) = \int C e^{-ax^2} e^{iKx} dx \quad (1.3.2)$$

Al completar el cuadrado, el exponente, $-ax^2 + iKx$ pasa a ser $-(x\sqrt{a} - iK/2\sqrt{a})^2 - K^2/4a$ y haciendo que $x\sqrt{a} - iK/2\sqrt{a} = \beta$ da la ec.1.3.3.

$$F(K) = \frac{C}{\sqrt{a}} e^{-K^2/4a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta \quad (1.3.3)$$

La integral definida es igual a $\sqrt{\pi}$, por lo tanto $F(K) = e^{-K^2/4a}$ la cual es nuevamente una función gaussiana, esta vez con K como variable. La desviación estándar esta definida como el rango de la variable en la cual la función disminuye en un factor de $e^{-1/2} = 0.607$ de su valor máximo. Por lo tanto, las desviaciones estándares para las dos curvas si $\sigma_x = 1/\sqrt{2a}$ y $\sigma_K =$

$\sqrt{2a} \sigma_x, \sigma_K=1$. Según vaya aumentando, $f(x)$ se va estrechando mientras que, por lo contrario, $F(K)$ se ensancha. Dicho de otra forma, cuanto más corta sea la longitud del pulso, más amplio será el ancho de banda de la frecuencia espacial.

1.4 Las transformadas bidimensionales

El par de transformadas de Fourier puede generalizarse fácilmente a dos dimensiones donde

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(K_x, K_y) e^{-i(K_x x + K_y y)} dK_x, dK_y \quad (1.4.1)$$

$$F(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(K_x x + K_y y)} dx dy \quad (1.4.2)$$

La cantidad de K_x y K_y son las frecuencias espaciales angulares de los ejes. Supongamos que estamos mirando la imagen de un piso revestido con baldosas blancas y negras colocadas alternativamente y cuyos bordes son paralelos a las direcciones de x e y . Si la extensión del piso fuera infinita, la distribución matemática de la luz reflejada podría considerarse en términos de una serie transformadas bidimensionales de Fourier. Si cada loza tiene una longitud l , el periodo espacial a lo largo de cada eje de $2l$ y las frecuencias espaciales fundamentales asociadas equivaldrían a π / l . Si la extensión de la distribución fuera finita, la función ya no sería periódica, teniendo la integral de Fourier que reemplazara a la serie. Según la ecuación (1.4.2), $f(x,y)$ puede construirse a través de una combinación lineal de funciones elementales cuya forma sea $\exp[-i(k_x x + K_y y)]$, cuyas amplitud y fase han sido oportunamente ponderadas por un factor complejo $F(K_x, K_y)$.

En tres dimensiones, las funciones elementales aparecen como $\exp[-(k_x x + K_y y + K_z z)]$ o $\exp(-i\mathbf{K}\mathbf{r})$ que corresponde a superficies planas. Si f es una función de onda, es decir, algún tipo de ondas tridimensionales $f(r,t)$, estas contribuciones elementales se convierten en ondas planas que toman la forma $\exp[-(i\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega t)]$. Dicho de otra forma, la perturbación puede sintetizarse por medio de una combinación lineal de ondas planas que tiene varios números de propagación y que se mueven en varias direcciones.

1.5 La transformada de una función cilíndrica

La función cilíndrica

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Facilita un ejemplo práctico importante de la aplicación de los métodos bidimensionales de Fourier. Las matemáticas no serán particularmente simples pero la importancia de los cálculos para la teoría de la difracción mediante aberturas circulares y lentes justifica ampliamente tal esfuerzo. La evidente simetría circular sugiere coordenadas polares y por lo tanto

$$\begin{aligned} K_x &= K_\alpha \cos \alpha \\ K_y &= K_\alpha \sin \alpha \\ x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

en cuyo caso $dx dy = r dr d\theta$. La transformada, $\mathfrak{T}[f(x)]$, entonces será

$$F(K_\alpha, \alpha) = \int_{r=0}^a \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{iK_\alpha r \cos(\theta - \alpha)} d\theta \right] r dr \quad (1.5.3)$$

Dado que $f(x,y)$ es simétrica circularmente, su transformada también deberá ser simétrica. Esto implica que $F(K_\alpha, \alpha)$ es dependiente de α . Por lo tanto, la integral puede simplificarse permitiendo que α sea igual a una constante, de donde

$$F(K_\alpha) = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} e^{iK_\alpha r \cos \theta} d\theta \right] r dr \quad (1.5.4)$$

se deduce que

$$F(K_\alpha) = 2\pi \int J_0(K_\alpha r) r dr \quad (1.5.5)$$

$F(K, r)$ es una función de Bessel de orden cero, introduciendo el cambio de variable, es decir $K_\alpha r = w$, tendremos $dr = K_\alpha^{-1}$ y la integral será

$$\frac{1}{K_\alpha} \int J_0(w) w dw \quad (1.5.6)$$

la transformada toma la función de Bessel de primer orden, es decir

$$F(K_\alpha) = \frac{2\pi}{K_\alpha^2} K_\alpha a J_1(K_\alpha a)$$

$$F(K_\alpha) = 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(K_\alpha a)}{K_\alpha a} \right] \quad (1.5.7)$$

1.6 La lente como sistema transformador de Fourier

En la figura 1.1 se muestra una transparencia posicionada en el plano focal frontal de una lente convergente que está siendo iluminada por luz paralela. A su vez, este objeto difunde las ondas planas que son recogidas por la lente mientras que los haces paralelos luminosos se hacen converger como su plano focal posterior. Si se colocara una pantalla en ese punto en Σ_t , el denominado plano de la transformada. La distribución del campo eléctrico en el marco del objeto que se denomina fusión de apertura, se transforma por medio de la lente en figuras de difracción de campo lejano. Si bien esta afirmación es válida para la mayoría de los casos, no es totalmente cierta. Después de todo, la lente no forma verdaderamente su imagen en el plano.

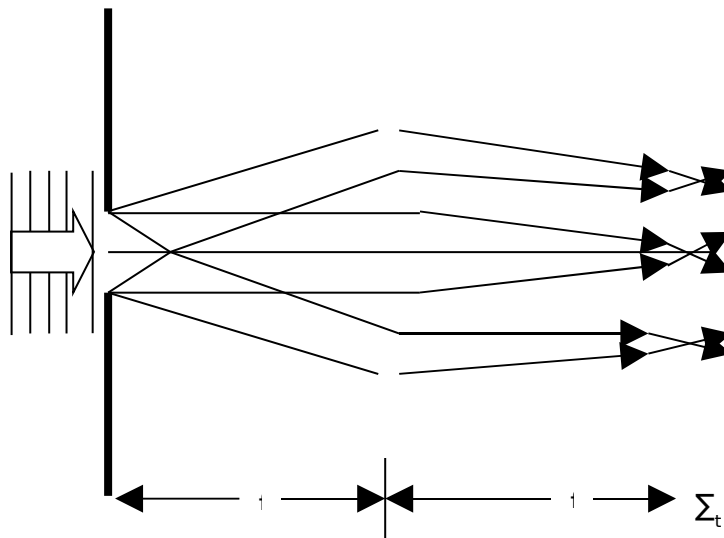


Figura 1.1. La luz difractada por una transparencia en el punto focal (u objeto) de una lente converge para formar una figura de difracción de campo lejano en el punto focal posterior (o imagen) de la lente.

Es extraordinario que aquella figura de campo E de Fraunhofer corresponda exactamente a la transformada de Fourier de la función de apertura. De aquí el objeto se halla en el plano focal frontal y todas las diversas ondas difractadas mantienen sus relaciones de fase viajando longitudes de camino óptico esencialmente igual a la transformada. Esto no ocurre cuando el objeto se desplaza del plano focal frontal. Entonces, se producirá una desviación de la fase que, realmente, tiene poca importancia, puesto que estamos generalmente interesados en la Irradiancia donde la fase está promediada no pudiendo detectar la distorsión de la fase.

Por lo tanto, si la máscara de un objeto de lo contrario opaco contiene un agujero circular único. El campo E que lo atraviesa se asemeja como función de Bessel, siendo muy parecida a la de la figura 1.2b. De manera parecida, si la transparencia del objeto cambia su densidad tan sólo a lo largo del eje, de manera que el perfil de transmisión es triangular (Figura 1.2a), entonces la amplitud de campo eléctrico se corresponderá con la figura 1.6.b- la transformada de Fourier de la función de triángulo será la función sinc al cuadrado.

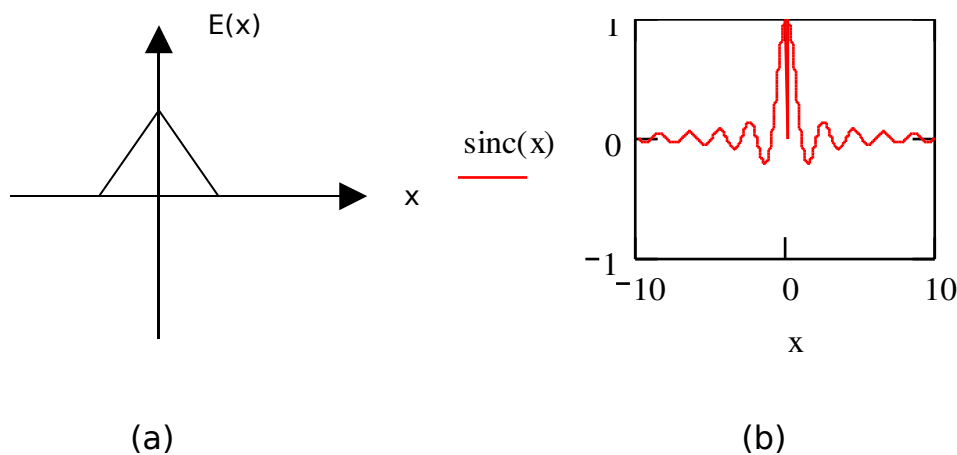


Figura 1.2 Transformada de la función del triángulo es la función sinc.

1.7 Transformada Fraccional de Fourier

Propiedades de la FFT

Los polinomios de Hermite son calculados por la ecuación 1.7.1

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (1.7.1)$$

Propiedades básicas

Propiedades de la Transformada Fraccional de Fourier.

Linealidad

Denotamos las dos funciones originales como $f(x)$ y $g(x)$. Si $\mathfrak{F}^a f(x)$ y $\mathfrak{F}^a g(x)$ son tomadas respectivamente por la transformada fraccional de Fourier, entonces la ec. 1.7.2

$$\mathfrak{F}^a [c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathfrak{F}^a f(x) + c_2 \mathfrak{F}^a g(x) \quad (1.7.2)$$

donde c_1 y c_2 constante complejas.

Continuidad

Por dos operaciones de la FFT con orden a_1 y a_2 , podemos escribir la ec. 1.7.3

$$\mathfrak{F}^{c_1 a_1 + c_2 a_2} f(x) = \mathfrak{F}^{c_1 a_1} \mathfrak{F}^{c_2 a_2} f(x) = \mathfrak{F}^{c_2 a_2} \mathfrak{F}^{c_1 a_1} f(x) \quad (1.7.3)$$

Auto-imagen

Un caso especial interesante es la función Eq.(33) se presenta cuando $c_2 a_2 = 4$ entonces

$$\mathfrak{F}^{c_1 a_1 + 4} f(x) = \mathfrak{F}^{c_1 a_1} \mathfrak{F}^4 f(x) = \mathfrak{F}^{c_1 a_1} f(x)$$

(1.7.4)

Convolución parcial / correlación

Una posible definición para la operación de la convolución de $f(x)$ y $g(x)$ ecuación 1.7.4 es

$$CONV(f, g) = \mathfrak{F}^{-1} [\mathfrak{F}^{-1} f(x) \cdot \mathfrak{F}^{-1} g(x)] \quad (1.7.5)$$

Propiedades adicionales

Regla de multiplicación

$$\mathfrak{F}^a [y^m f(y)](x) = [x \cos(2\pi a) - i \sin(2\pi a) D]^m \mathfrak{F}^a [f(y)](x), \quad (1.7.6)$$

Regla de diferenciación

$$\mathfrak{F}^a [D^m f(y)](x) = [-ix \sin(2\pi a) + \cos(2\pi a) D]^m \mathfrak{F}^a [f(y)](x), \quad (1.7.7)$$

Regla del producto mixto

$$\begin{aligned} & -[\sin(2\Pi a) + ix^2 \cos(2\Pi a)] \sin(2\Pi a) \\ & + x \cos(2\Pi a) D - i \sin(2\Pi a) \cos(2\Pi a) D^2, \end{aligned} \quad (1.7.8)$$
$$\mathfrak{S}^a \left[(yD)^m \right] (x) = i \{ i \}^m \mathfrak{S}^a [f(y)](x)$$

Regla de desplazamiento

$$\mathfrak{S}^a \mathfrak{S}^b [f(y)](x) = e^{\left(-ib \sin \left[2\Pi a \left[x + 0.5b \cos \left[2\Pi a \right] \right] \right) \right)} \mathfrak{S}^a [f(y)] \left[x + b \sin(2\Pi a) \right], \quad (1.7.9)$$

donde \mathfrak{S}^b es denotada por la operación

$$\mathfrak{S}^b [f](x) = f(x + b), \quad (1.7.10)$$

Regla de la exponencial

$$\mathfrak{S}^a \left[e^{iby} f(y) \right] (x) = e^{\left(ib \cos \left[2\Pi a \left[x + 0.5b \sin \left[2\Pi a \right] \right] \right) \right)} \mathfrak{S}^a [f(y)] \left[x + b \sin(2\Pi a) \right] \quad (1.7.11)$$

PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES

2.1 Introducción

El análisis del procesamiento de imágenes digitales envuelven una serie de cuestiones referente al tratado de una imagen digitalizada, la cual lleva cierto proceso de digitalización, en este capítulo se hace énfasis referente a los conceptos de procesamiento de imágenes digitales y las distintas técnicas de procesamiento como: los filtros lineales y no lineales, de rango, dilatación, erosión entre otros.

Se da referencia a los filtros espaciales teniendo como objetivo modificar la contribución de determinados rangos de frecuencias a la formación de la imagen. El término espacial se refiere al hecho de que el filtro se aplica directamente a la imagen y no a una transformada de la misma.

Así como los conceptos principales de encriptación de una imagen digital, la cual consiste en enredar un mensaje con una fórmula matemática irremediamente complicada, volviéndolo ilegible a cualquiera, salvo tú y las personas que tengan la clave secreta para decodificar el mensaje.

2.2 Conceptos básicos de imágenes digitales

Imágenes digitales son fotografías electrónicas tomadas de una escena o escaneadas de documentos -fotografías, manuscritos, textos impresos e ilustraciones. Se realiza una muestra de la imagen digital y se confecciona un mapa de ella en forma de cuadrícula de puntos o elementos de la figura (píxeles). A cada píxel se le asigna un valor tonal (negro, blanco, matices de gris o color), el cual está representado en un código binario (ceros y unos). Los dígitos binarios ("bits") para cada píxel son almacenados por una computadora en una secuencia, y con frecuencia se los reduce a una representación matemática (comprimida). Luego la computadora interpreta y lee los bits para producir una versión analógica para su visualización o impresión.

Resolución es la capacidad de distinguir los detalles espaciales finos. Se define como el número de píxeles contenidos en la imagen por unidad de longitud. Se mide con píxeles por pulgada (dpi/ppi).

Cuando hablamos de una imagen de 300dpi, estamos indicando que en cada pulgada hay 300x300 píxeles, es decir, 90.000 píxeles.

La calidad de una imagen digital esta directamente relacionada con su resolución, ya que cuando más grande sea su cantidad de píxeles por pulgada, mejor calidad tendrá, pero también ocupará un espacio mayor de archivo, ya que presentará más bits de información.

Mayor cantidad de dpi = mayor calidad = mayor tamaño de archivo

El tamaño de la imagen digital, expresada en píxeles de ancho por píxeles de alto, se refiere a las dimensiones absolutas en píxeles de la imagen digital, ésta es independiente de su resolución.

Resolución de la imagen digital, expresada en píxeles por pulgada, la cantidad de píxeles de la imagen por pulgada, nos indica pues el tamaño de los píxeles que formaran la imagen. Cuanta más alta sea la resolución más píxeles tendremos por pulgada, y por lo tanto, éstos serán más pequeños y viceversa.

- Mayor resolución, más píxeles por pulgada, mayor detalle de imagen.
- Menor resolución, menos píxeles por pulgada, menor definición del detalle de la imagen.

Dimensiones de píxel son las medidas horizontales y verticales de una imagen, expresadas en píxeles. Las dimensiones de píxel se pueden determinar multiplicando tanto el ancho como la altura por el dpi (punto por pulgada). Una cámara digital también tendrá dimensiones de píxel, expresadas como la cantidad de píxeles en forma horizontal y en forma vertical que definen su resolución.

Profundidad de bits es determinada por la cantidad de bits utilizados para definir cada píxel. Cuanto mayor sea la profundidad de bits, tanto mayor será la cantidad de tonos (escala de

grises o color) que puedan ser representados. Las imágenes digitales se pueden producir en blanco y negro (en forma bitonal), a escala de grises o a color.

Una *imagen bitonal* está representada por píxeles que constan de 1 bit cada uno, que pueden representar dos tonos (típicamente negro y blanco), utilizando los valores 0 para el negro y 1 para el blanco o viceversa.

Una imagen *a escala de grises* está compuesta por píxeles representados por múltiples bits de información, que típicamente varían entre 2 a 8 bits o más.

Rango dinámico es el rango de diferencia tonal entre la parte más clara y la más oscura de una imagen. Cuanto más alto sea el rango dinámico, se pueden potencialmente representar más matices, a pesar de que el rango dinámico no se correlaciona en forma automática con la cantidad de tonos reproducidos. El rango dinámico también describe la capacidad de un sistema digital de reproducir información tonal. Esta capacidad es más importante en los documentos de tono continuo que exhiben tonos que varían ligeramente, y en el caso de las fotografías puede ser el aspecto más importante de la calidad de imagen.

Compresión se utiliza para reducir el tamaño del archivo de imagen para su almacenamiento, procesamiento y transmisión. El tamaño del archivo para las imágenes digitales puede ser muy grande, complicando las capacidades informáticas y de redes de muchos sistemas. Todas las técnicas de compresión abrevian la cadena de código binario en una imagen sin comprimir, a una forma de abreviatura matemática, basada en complejos algoritmos. Existen técnicas de compresión estándar y otras patentadas. En general es mejor utilizar una técnica de compresión estándar y ampliamente compatible, antes que una patentada, que puede ofrecer compresión más eficiente y/o mejor calidad, pero que puede no prestarse a un uso o a estrategias de preservación digital a largo plazo.

Tamaño del archivo se calcula multiplicando el área de superficie (altura x ancho) de un documento a ser escaneado, por la profundidad de bits y el dpi². Debido a que el archivo de imagen se representa en bytes, que están formados por 8 bits, divide esta cifra por 8, es decir:

$$\text{Tamaño de archivo} = (\text{altura} \times \text{ancho} \times \text{profundidad de bits} \times \text{dpi}^2) / 8 \quad (2.2.1)$$

Sistema convencional para dar nombres a los archivos según el tamaño de los mismos: Debido a que las imágenes digitales tienen como resultado archivos muy grandes, la cantidad de bytes con frecuencia se representa en incrementos de 2^{10} (1.024) o más:

1 Kilobyte (KB) = 1.024 bytes

1 Megabyte (MB) = 1.024 KB

1 Gigabyte (GB) = 1.024 MB

1 Terabyte (TB) = 1.024 GB

Técnicas de procesamiento de imágenes

Los filtros espaciales tienen como objetivo modificar la contribución de determinados rangos de frecuencias a la formación de la imagen. El término espacial se refiere al hecho de que el filtro se aplica directamente a la imagen y no a una transformada de la misma, es decir, el nivel de gris de un píxel se obtiene directamente en función del valor de sus vecinos.

Los filtros espaciales pueden clasificarse basándose en su linealidad: *filtros lineales* y *filtros no lineales*. A su vez los *filtros lineales* pueden clasificarse según las frecuencias que dejen pasar: los *filtros pasa bajas* atenúan o eliminan las componentes de alta frecuencia a la vez que dejan inalteradas las bajas frecuencias; los *filtros pasa altas* atenúan o eliminan las componentes de baja frecuencia con lo que agudizan las componentes de alta frecuencia; los *filtros pasa bandas* eliminan regiones elegidas de frecuencias intermedias.

La forma de operar de los filtros lineales es por medio de la utilización de máscaras que recorren toda la imagen centrando las operaciones sobre los píxeles que se encuadran en la región de la imagen original que coincide con la máscara y el resultado se obtiene mediante una computación (suma de convolución) entre los píxeles originales y los diferentes coeficientes de las máscaras.

Los *filtros espaciales no lineales* también operan sobre entornos. Sin embargo, su operación se basa directamente en los valores de los píxeles en el entorno en consideración. Unos ejemplos de filtros no lineales habituales son los filtros mínimo, máximo y de mediana que son conocidos como *filtros de rango*. El filtro de mediana tiene un efecto de difuminado de la imagen, y permite realizar una eliminación de ruido de forma eficaz, mientras que el filtro de

máximo se emplea para buscar los puntos más brillantes de una imagen produciendo un efecto de *erosión*, y el filtro de mínimo se emplea con el objetivo contrario, buscar los puntos más oscuros de una imagen produciendo un efecto de *dilatación*.

Otra clasificación de los filtros espaciales puede hacerse basándose en su finalidad, y así tenemos los *filtros de realce* (Sharpening) para eliminar zonas borrosas o *filtros de suavizado* (Smoothing) para difuminar la imagen. También tenemos los filtros diferenciales que se componen de varios tipos de máscaras (Laplaciano, Prewitt, Sobel, etc.), y se utilizan para la *detección de bordes*. El proceso de detección de bordes se basa en realizar un incremento del contraste en las zonas donde hay una mayor diferencia entre las intensidades, y en una reducción de éste donde no tenemos variación de intensidad. [4]

2.2.1 Convolución

El tratamiento de imágenes más empleado y conocido, es el tratamiento espacial también conocido como *convolución*. Las convoluciones discretas son muy usadas en el procesado de imagen para el suavizado de imágenes, el afilado de imágenes, detección de bordes, y otros efectos. Mediante este proceso se calcula el valor de un determinado punto en función de su valor y del valor de los puntos que le rodean, aplicando una simple operación matemática en función de la cual se obtendrá un valor resultante para el punto en cuestión.

La operación de la convolución puede representarse como en la ecuación (2.3.1).

$$g(x,y) = f(x,y) \otimes a(x,y) \quad (2.3.1)$$

donde $a(x,y)$ es la función respuesta al impulso del filtro a aplicar (o *máscara de convolución*), $f(x,y)$ es la imagen de entrada y $g(x,y)$ es la imagen filtrada. Las expresiones matemáticas para el caso bidimensional se muestran en las ecuaciones (2.3.2) y (2.3.3).

$$\text{Caso continuo} \quad g(x,y) = f(x,y) \otimes a(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi, \zeta) a(x - \chi, y - \zeta) d\chi d\zeta \quad (2.3.2)$$

$$g[m,n] = f[m,n] \otimes a[m,n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[j,k] a[m-j, n-k] \quad (2.3.3)$$

Caso discreto

La operación matemática en que consiste la convolución es simplemente una suma ponderada de píxeles en el vecindario del píxel fuente. Los pesos son determinados por una pequeña matriz llamada máscara de convolución, que determina unos coeficientes a aplicar sobre los puntos de una determinada área. Las dimensiones de la matriz son normalmente impares e iguales, de forma que se pueda determinar un centro de una matriz cuadrada. La posición del valor central que corresponde con la posición del píxel de salida.

Una ventana deslizante, llamada *ventana de convolución* (figura.2.1), se centra en cada píxel de una imagen de entrada y genera nuevos píxeles de salida. Para aplicar la máscara a esa zona se multiplican los valores de los puntos que rodean al píxel que estamos tratando por su correspondiente entrada o coeficiente en la máscara y luego se suman esos productos.

Es muy importante colocar los nuevos píxeles en una nueva imagen. Si el recién generado píxel reemplaza al antiguo píxel, éste será usado para calcular el valor del siguiente píxel nuevo.

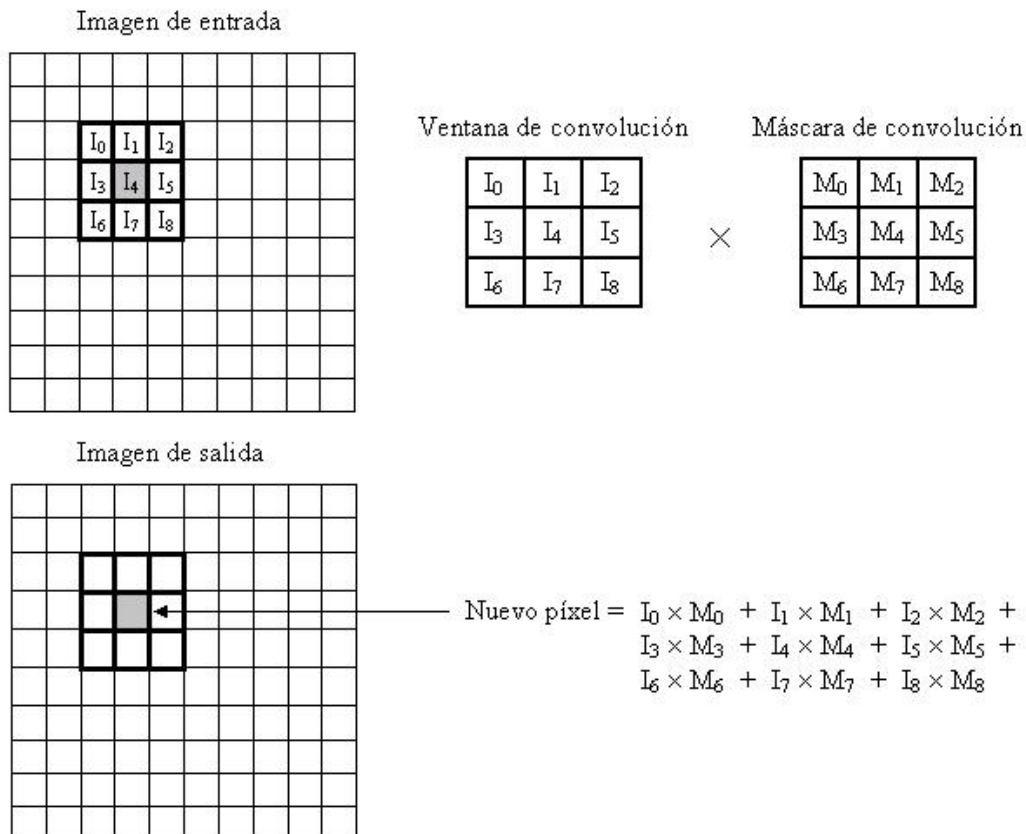


Fig.2.1 Representación de de ventana y mascara de convolución.

La suma de los pesos en la máscara de convolución afecta a la intensidad general de la imagen resultante. Muchas máscaras de convolución tienen coeficientes que suman un total de 1 (como los filtros pasa bajas usados en el suavizado de imagen). Es este caso, la imagen convolucionada tendrá la misma intensidad media que la imagen original. Algunas máscaras de convolución (como las usadas en detección de bordes) tienen coeficientes positivos y negativos y suman un total de 0, en esta situación se generarán valores de píxeles negativos. En caso de que nos salgamos del rango impuesto para la imagen $f(x,y)$, bien porque necesitemos utilizar máscaras cuya suma de valores sea mayor que la unidad o porque utilicemos máscaras con coeficientes negativos, debemos normalizar el resultado aplicando la función más adecuada en cada caso.

Existe una gran variedad de máscaras que realizan diferentes acciones sobre una imagen. Las hay que suavizan los bordes, otras que limpian la imagen, otras que la oscurecen, etc. Las máscaras, como operadores lineales más utilizados, suelen ser de los de pasa baja, pasa alta y detección de bordes. Por ejemplo, mediante la siguiente matriz no se realiza ningún cambio a la imagen:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

El tamaño de la máscara podría ser arbitrario, e incluso no restringido a matrices cuadradas, por lo que se podría utilizar perfectamente matrices rectangulares. Pero nos limitaremos a que la mayoría de los procesados utilicen máscaras cuadradas de tamaño 3x3, ya que para comprender su funcionamiento son las máscaras más simples. Una cosa que se aprende con rapidez es que cuando la máscara de convolución aumenta de tamaño, la carga computacional aumenta exponencialmente.

La primera cuestión al implementar una función de convolución es como tratar los bordes de la imagen. Cuando la ventana de convolución se centra en el primer píxel de una imagen en

(0,0), la ventana deslizante sobresale de la imagen (figura 2.2) en el borde superior y en el izquierdo. ¿Qué valores de la imagen deben ser multiplicados por esos coeficientes de convolución que sobresalen de los bordes?

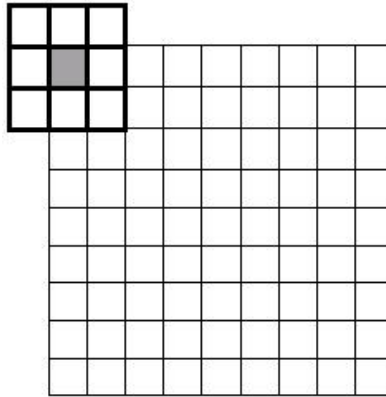


Figura 2.2 .Tratar bordes de la Imagen

Hay varias maneras para solucionar este problema.

- o La primera solución es tratar las celdas vacías en la ventana de convolución como ceros. Esto se conoce como zero-padding. Es fácil de realizar pero no es una buena idea si los bordes de la imagen resultante son tan importantes como el resto de la imagen.
- o La siguiente solución es empezar la convolución en la primera posición donde la ventana no sobresalga de la imagen. Si la máscara de convolución es de tamaño 3x3, se empezaría convolucionando con el píxel en (1,1) en vez del píxel en (0,0). Este método es sencillo de implementar. En la imagen de salida, los bordes convolucionados son copiados para crear una imagen con el mismo tamaño que la imagen de entrada.
- o Otros métodos amplían la imagen antes de convolucionarla. Una forma de hacerlo es duplicar los bordes. Usando una máscara 3x3, se copiarían las filas superiores e inferiores, así como las columnas izquierda y derecha.
- o El otro método es “envolver” la imagen (Figura 2.3), es decir, considerar como píxel contiguo al del borde izquierdo, el píxel del borde derecho y viceversa, así como con los del borde superior e inferior. Si se quiere convolucionar una imagen

256x256 con una máscara de convolución de 3x3, la primera ventana de convolución opera con los píxeles en las posiciones que se ven en la siguiente figura. Este último método ha sido el empleado en la implementación de la aplicación.

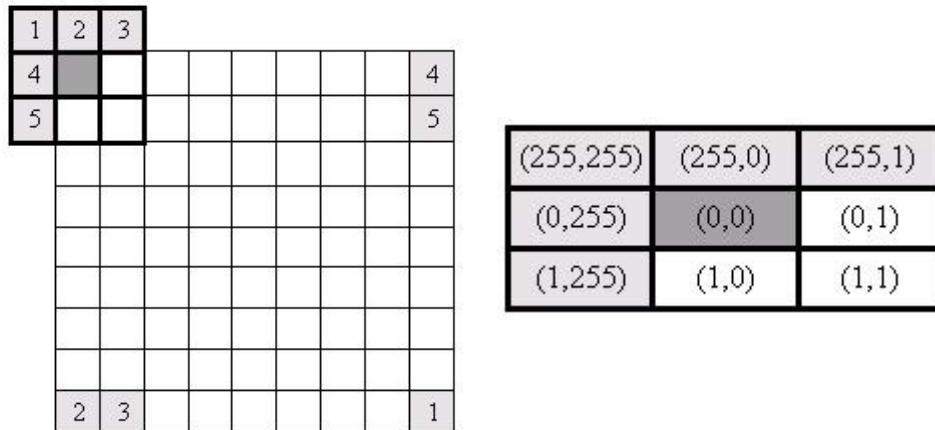


Fig.2.3 Imagen a envolver

2.2.2 Suavizado

El suavizado de imágenes se utiliza normalmente bajo dos supuestos: dar a una imagen un difuminado o efecto especial y para la eliminación de ruido.

El *suavizado* o *filtrado espacial pasa baja* borra los detalles más finos de una imagen, es decir, conlleva una atenuación de las altas frecuencias, mientras se mantienen las bajas y medias frecuencias. Tiene un buen número de aplicaciones: algunas veces se emplea para simular una cámara desenfocada, o para restar énfasis a un fondo; mientras los fotógrafos usan un filtro de cámara para conseguir ese efecto, los artistas informatizados emplean filtros digitales.

El suavizado se alcanza mediante la convolución, y es fácil ver en la máscara de convolución que el suavizado es simplemente el promedio del vecindario. Promediar tiende a eliminar los valores extremos de un grupo, así los píxeles extremadamente claros u oscuros pueden hacerse más grises dependiendo de los vecinos del píxel. Cuanto más grande es la máscara, mayor es el efecto de suavizado y mayor el tiempo de cómputo requerido.

2.2.3 Filtros Pasa Bajas

Las máscaras de los filtros pasa bajas deben tener todos sus coeficientes positivos y la suma de ellos debe ser igual a uno. Las máscaras de tamaño 3x3 más utilizadas son las siguientes:

- o La llamada propiamente pasa baja (Figura 2.4) .
- o La llamada "Smooth" (Figura 2.5).

0	1/10	0	1/16	2/16	1/16
1/10	6/10	1/10	2/16	4/16	2/16
0	1/10	0	1/16	2/16	1/16

Figura 2.4. Pasa Baja

Figura 2.5 Smooth

Las dos máscaras tienen el mismo efecto sobre la imagen, pero con la llamada *Smooth*, al tener los coeficientes un mayor valor, el efecto de difuminado es mucho más fuerte. En el caso de la máscara *Smooth* debemos darnos cuenta que la suma de los valores es 16 y no 1, por lo que los valores obtenidos con ella para los puntos de la imagen, se nos pueden salir del rango válido (en nuestro caso 255), por lo que el resultado debe ser normalizado dividiéndolo por la suma de la máscara, en este caso 16. En el caso de la máscara *Pasa Baja* la suma total es de 10, valor por el cual dividimos para normalizar el resultado.

El filtrado con una máscara pasa baja, como la *Smooth*, produce un efecto de difuminado de los bordes y emborronamiento de la imagen filtrada con respecto a la imagen original. Esta pérdida de los detalles pertenecientes a las altas frecuencias es lo que caracteriza a todos los filtros pasa baja o de suavizado.

Las máscaras vistas anteriormente no son las únicas que producen un efecto pasa baja, pero si son las más extendidas. Cada uno puede diseñar su propia máscara, sólo hay que seguir las pautas dadas anteriormente. Las siguientes máscaras son ejemplos propios:

1/12	1/12	1/12	1/10	0	1/10	1/8	1/8	1/8
1/12	4/12	1/12	1/10	4/10	1/10	0	2/8	0
1/12	1/12	1/12	1/10	0	1/10	1/8	1/8	1/8

2.2.4 Filtro de Media

De entre la multitud de máscaras de filtro pasa baja destaca especialmente la máscara de *media*, que es la que efectúa el promedio de los valores del entorno. El filtro espacial de media reemplaza el valor de un píxel por la media de los valores del punto y sus vecinos. Su efecto es el difuminado o suavizado de la imagen y se aplica junto con el de mediana para eliminar ruidos. Este filtro lo implementamos con la siguiente máscara para un tamaño 3x3 (figura 2.6) :

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

Figura 2.6 Máscara de tamaño 3x3

Normalmente el tamaño de la máscara se toma en función de la cantidad de suavizado que queramos aplicar en cada momento. La visualización del resultado es el único medio de saber si hemos elegido el tamaño adecuado.

Se puede observar que el efecto final del filtro de la media es un suavizado de la imagen por reducción o redistribución del valor de los píxeles. Este filtro tiene el resultado opuesto a los de detección de bordes, donde el objetivo de los filtros es acentuar las diferencias, por esta razón el filtro de la media es un filtro pasa baja. También hay que notar que este filtro no modifica la imagen en las zonas donde el valor de los píxeles son los mismos, en oposición a los detectores de bordes que ponen estas regiones a cero.

En resumen, la media, como el resto de los filtros de suavizado, suaviza los contornos y otros detalles de forma de los objetos aparezcan menos definidos.

Realce

El objetivo principal del *realce* es el de destacar los detalles finos de una imagen o intensificar detalles que han sido difuminados, bien sea por error o bien por efecto natural del método de adquisición de la imagen. El realce de una imagen aumentará su contraste.

Para la implementación del realce se utilizan, lo mismo que para el suavizado, técnicas basadas en la aplicación de filtros. El realce de una imagen se basa en el *filtro pasa alta*. Un filtro pasa alta eliminará los componentes bajos de frecuencia (como el medio de la imagen) y mostrará sólo los detalles altos.

Por lo general, la máscara de convolución usada comúnmente en el realce, es decir, la máscara de filtro pasa alta, tiene un coeficiente positivo en su centro y coeficientes sobre todo negativos alrededor del borde externo.

2.2.5 Filtros Pasa Altas

Para implementar un *filtro pasa alta*, es decir permitir pasar las componentes de altas frecuencias y diluir las de baja frecuencia, es necesario que el filtro posea coeficientes negativos en la periferia y positivos en el centro. Así, cuando la máscara se encuentra sobre una zona uniforme, la salida proporcionada por la máscara será 0 o próxima a dicho valor. Normalmente, este tipo de filtro elimina también el término de frecuencia 0 con lo que la imagen resultante deberá tener valores de intensidad negativos. Como sólo estamos considerando niveles positivos de gris, los resultados del filtrado pasa alta necesariamente implican alguna forma de desplazamiento o cambio de escala para que al final los niveles de gris queden dentro del rango.

Las máscaras pasa altas de tamaño 3x3 más utilizadas se muestran en la figura 2.7.

1	-2	1	-1	-1	-1	0	-1	0
-2	4	-2	-1	8	-1	-1	4	-1
1	-2	1	-1	-1	-1	0	-1	0
Pasa Alta 1	Pasa Alta 2	Pasa Alta 3						

Figura 2.7 Pasa Alta1, Pasa Alta 2, Pasa Alta3.

En estas máscaras, *llamadas propiamente pasa alta*, hay que destacar que la suma de los coeficientes es cero. Así cuando la máscara está sobre una zona de la imagen de poco contraste o pequeña variación del nivel de gris, la salida de la máscara es cero o muy pequeña. Esto se traduce en que zonas uniformes con distintos niveles de gris son pasadas a un mismo nivel (el cero), con lo que perdemos información de la imagen. Además, eliminar los términos de baja frecuencia produce una disminución de la media de los niveles de gris, reduciendo significativamente el contraste global de la imagen.

2.2.6 Detección de bordes

Uno de los más importantes y sencillos procesados es la *detección de bordes*. Importante porque de él se puede empezar a extraer importante información de la imagen, como pueden ser las formas de los objetos que la componen, y sencillo porque los operadores de detección de bordes son simples máscaras de convolución.

Dentro de las numerosas aplicaciones para la detección de bordes, las artistas digitales lo usan para crear imágenes con contornos deslumbrantes pues la salida de un detector de bordes puede ser agregada a una imagen original para realzar los bordes. La detección de bordes es a menudo el primer paso en la segmentación de imagen, que es un campo del análisis de la imagen, y se utiliza para agrupar los píxeles en regiones para determinar una composición de la imagen. La detección de bordes también es usada en el registro de imagen, el cual alinea dos imágenes que podrían ser adquiridas en momentos separados y de sensores diferentes.

Los bordes de objetos en una imagen los podemos distinguir por los cambios más o menos bruscos de valor entre dos o más píxeles adyacentes. Podemos realizar una clasificación general de los bordes según sea su dirección en:

- o *Bordes verticales*, cuando píxeles conectados verticalmente tienen valores diferentes respecto de los anteriores o posteriores.
- o *Bordes horizontales*, cuando tenemos píxeles conectados horizontalmente, y estos tienen distintos valores respecto de los anteriores o posteriores.

- o *Bordes oblicuos*, cuando tenemos una combinación de las componentes horizontales y verticales.

La diferencia entre los valores de los píxeles nos indica lo acentuado del borde, de forma que a mayores diferencias tenemos bordes más marcados y a menores tenemos unos bordes suavizados.

Los filtros utilizados para la detección de bordes son *filtros diferenciales*, que se basan en la derivación o diferenciación. Dado que el promediado de los píxeles de una región tiende a difuminar o suavizar los detalles y bordes de la imagen, y esta operación es análoga a la integración, es de esperar que la diferenciación tenga el efecto contrario, el de aumentar la nitidez de la imagen, resaltando los bordes.

2.2.7 Eliminación de ruido

Entendemos por *ruido en imágenes digitales* cualquier valor de un píxel de una imagen que no se corresponde exactamente con la realidad. Cuando se adquiere una imagen digital, ésta está contaminada por ruido. El ruido se debe, la mayoría de las veces al equipo electrónico utilizado en la captación de las imágenes (ruido de cuantificación de la imagen, efecto de niebla en la imagen... etc) y al ruido añadido en los tramos de transmisión (posibles interferencias o errores al transmitir los bits de información).

Vamos a distinguir dos clases diferentes de ruido:

- ***Ruido gaussiano***: Se caracteriza por tener un espectro de energía constante para todas las frecuencias. Cuando se presenta este problema, el valor exacto de cualquier píxel es diferente cada vez que se captura la misma imagen. Este efecto, suma o resta un determinado valor al nivel de gris real y es independiente de los valores que toma la imagen.
- ***Ruido impulsivo***: Se caracteriza por la aparición de píxeles con valores arbitrarios normalmente detectables porque se diferencian mucho de sus vecinos más próximos. La distribución viene dada por la ecuación (2.3.4).

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } r(x,y) < p/2 \\ L-1 & \text{si } p/2 \leq r(x,y) < p \\ \langle \rangle f(x,y) & \text{si } r(x,y) \geq p \end{cases} \quad (2.3.4)$$

donde $r(x,y)$ es un número aleatorio con distribución uniforme en $[0,1)$ y p es la probabilidad de ocurrencia del ruido aleatorio, es decir, el porcentaje de puntos de la imagen que se verán afectados por el ruido impulsivo del total de puntos de la imagen.

El ruido gaussiano tiene un efecto general en toda la imagen, es decir, la intensidad de cada píxel de la imagen se ve alterada en cierta medida con respecto a la intensidad en la imagen original. Por el contrario, se observa que el ruido impulsivo tiene un efecto más extremo sobre un subconjunto del total de píxeles de la imagen. Un tanto por ciento de los píxeles de la imagen toma arbitrariamente el valor extremo 0 o 255.

Una forma de eliminar el ruido de una imagen es mediante el suavizado de imágenes, es decir, el filtrado pasa baja se emplea no sólo para el suavizado de imágenes, sino también para la eliminación de ruido. De hecho, el filtrado pasa baja es una manera efectiva de reducir el ruido gaussiano en una imagen, mientras que no es tan efectivo con el ruido impulsivo. Como promediar reduce los valores extremos de la vecindad del píxel, hacer un filtro de media tiende a reducir el contraste de las imágenes, pues los valores extremos, altos y bajos, son cambiados por valores medios.

El problema con la utilización de filtros pasa baja para eliminar el ruido de imágenes consiste en que los bordes de los objetos se vuelven borrosos. Los bordes contienen una cantidad enorme de información de una imagen. Filtrando el ruido impulsivo de una imagen, el **filtrado de mediana** puede ser una mejor opción. Los filtros de mediana hacen un mejor trabajo conservando los bordes. [2]

2.2.8 Filtrado de Mediana

Los filtros de suavizado lineales o filtros pasa baja tienden a "difuminar los ejes" a causa de que las altas frecuencias de una imagen son atenuadas. La visión humana es muy sensible a esta información de alta frecuencia. La preservación y el posible realce de este detalle son muy importantes al filtrar. Cuando el objetivo es más la reducción del ruido que el difuminado, el empleo de los **filtros de mediana** representan una posibilidad alternativa.

A menudo, las imágenes digitales se corrompen con ruido durante la transmisión o en otras partes del sistema. Esto se ve a menudo en las imágenes convertidas a digital de una señal de la televisión. Usando técnicas del filtrado de ruido, el ruido puede ser suprimido y la imagen corrompida se puede restaurar a un nivel aceptable. En aplicaciones de ingeniería eléctrica, el ruido se elimina comúnmente con un filtro pasa baja. El filtrado pasa baja es satisfactorio para quitar el ruido gaussiano pero no para el ruido impulsivo. Una imagen corrupta por ruido impulsivo tiene varios píxeles que tienen intensidades visiblemente incorrectas como 0 o 255. Hacer un filtrado pasa baja alterarán estas señales con los valores extremos sobre la vecindad del píxel. Un método mucho más eficaz para eliminar el ruido impulsivo es el filtrado de mediana (figura 2.8).



Figura 2.8 Filtrado de mediana

En el filtrado de mediana, el nivel de gris de cada píxel se reemplaza por la mediana de los niveles de gris en un entorno de este píxel, en lugar de por la media. Recordar que la mediana M de un conjunto de valores es tal que la mitad de los valores del conjunto son menores que M y la mitad de los valores mayores que M , es decir en un conjunto ordenado de mayor a menor o viceversa, sería el valor de la posición central.

El filtro de la mediana no puede ser calculado con una máscara de convolución, ya que es un filtro no lineal. Podemos ver como este tipo de filtro elimina totalmente el punto que tenía un valor muy diferente al resto de sus vecinos. Como se selecciona el valor de centro, el filtrado de mediana consiste en forzar que puntos con intensidades muy distintas se asemejen más a sus vecinos, por lo que observamos que el filtro de mediana es muy efectivo para eliminar píxeles cuyo valor es muy diferente del resto de sus vecinos, como por ejemplo eliminando ruido de la imagen.

2.2.9 Dilatación / Erosión

El *filtrado de mínimo y de máximo* es muy similar al filtrado de mediana, junto con éste forman los *filtros de rango*. En vez de sustituir el píxel del centro por el valor medio, se utiliza el valor mínimo o máximo de la ventana. Estos filtros son eficaces en eliminar el ruido impulsivo

extremo. El filtro mínimo elimina los puntos blancos (valor 255) mientras que el filtro máximo elimina los puntos oscuros (valor 0).

Con el filtrado de mínimo, un píxel se representa con el píxel más oscuro de su vecindad, por lo que la intensidad total de la imagen de salida será reducida. Éste filtro tiende a "ensanchar" las líneas negras de la imagen, por esta razón también es conocido como *filtro de dilatación*.

Con el filtrado de máximo se aumenta la intensidad total de la imagen de salida. Este filtro también es conocido como *filtro de erosión*, debido a la propiedad que posee de "adelgazar" líneas. Si nuestra imagen posee líneas negras, al elegir el valor máximo de la vecindad de cada píxel, los valores más oscuros serán sustituidos por valores más altos con la consiguiente reducción de los píxeles cercanos al negro.

2.2.10 Filtrado frecuencial

El *filtrado* en el dominio *frecuencial* incluye técnicas que están basadas en la modificación de la transformada de Fourier de la imagen. Los filtros pasa bajas atenúan o eliminan los componentes de alta frecuencia en el dominio de Fourier, mientras dejan las bajas frecuencias sin alterar (esto es, éste tipo de filtros dejan "pasar" las frecuencias bajas). Las altas frecuencias son características de bordes, curvas y otros detalles en la imagen, así el efecto de un filtro pasa baja es el de difuminar la imagen. De igual forma, los filtros pasa alta, atenúan o eliminan las bajas frecuencias. Éstas son las responsables de las pequeñas variaciones de las características de una imagen, tal como pueden ser el contraste global y la intensidad media. El resultado final de un filtro pasa alta es la reducción de estas características, y la correspondiente aparición de bordes y otros detalles de curvas y objetos.

En la práctica, las pequeñas máscaras espaciales son mucho más empleadas que las transformadas de Fourier debido a su facilidad de implementación y a su velocidad de operación. Sin embargo, es esencial la comprensión de los conceptos en el dominio frecuencial para solucionar los problemas que no se pueden resolver con técnicas espaciales.

2.2.11 Visualización del espectro

Hay que superar algunas dificultades al mostrar el espectro de frecuencia de una imagen. La primera surge debido al amplio rango dinámico de los datos resultantes de la transformada discreta de Fourier. En la imagen original el valor de un píxel será un número entero entre (0,255), representando el grado de intensidad, pero en la imagen que representa el espectro de Fourier los valores de los píxeles son números en punto flotante y no están limitado a los valores de (0,255). Estos datos deben ser escalados de nuevo para transformarlos en un formato visible, de forma que no exceda la capacidad del dispositivo de visualización. Una cuantización lineal simple no proporciona siempre los mejores resultados, pues muchas veces se pierden los puntos de baja amplitud. El término cero de la frecuencia es generalmente el componente simple más grande, es también el punto menos interesante al examinar el espectro de la imagen. Una solución común a este problema es representar el logaritmo del espectro mejor que el espectro por sí mismo. La función que se aplica a la imagen del espectro para su representación es una *función de compresión de rango dinámico*. La expresión matemática (2.3.5) genérica de esta transformación para el caso de rangos muy grandes es:

$$D(u,v) = c \log(1 + |H(u,v)|) \quad (2.3.5)$$

donde $|H(u,v)|$ es la magnitud de los datos a mostrar en frecuencia y c es una constante de escala que en el caso de una imagen con rango R toma el valor de la ecuación 2.3.6:

$$c = 255 / \log(1 + |R|) \quad (2.3.6)$$

La suma de 1 asegura que el valor 0 del píxel no consigue pasar por la función del logaritmo.

Desde que científicos e ingenieros se adaptaron al uso del sistema de coordenadas cartesiano, se prefiere mostrar los espectros de la imagen de esa forma. Un espectro inalterado de la imagen tendrá el componente cero visualizado en la esquina superior izquierda de la imagen, la cual corresponde al píxel cero. La forma habitual de mostrar los espectros de la imagen es cambiando de posición la imagen tanto horizontalmente como verticalmente,

desplazándola la mitad de la anchura y la altura de la imagen, de forma que el origen de coordenadas se encuentre en el centro de la imagen. Todos los espectros que se muestran en las aplicaciones se exhiben de esta manera convencional. Este formato es conocido como ordenado (en oposición con desordenado).

2.2.12 Filtro ideal

Los bordes y otras transiciones bruscas (como el ruido) en los niveles de gris de una imagen contribuyen significativamente al contenido en altas frecuencias de su transformada de Fourier. Por tanto el difuminado se consigue, en el dominio de la frecuencia, a base de atenuar un rango específico de componente de alta frecuencia en la transformada de una imagen dada; esta característica es proporcionada por los *filtros pasas bajas*.

Un *filtro ideal pasa bajas* bidimensional es aquel cuya función de transferencia verifica la siguiente relación 2.3.7:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

donde D_0 es una cantidad especificada no negativa (frecuencia de corte) y $D(u,v)$ es la distancia desde el punto (u,v) (ecuación 2.3.8), al origen de coordenadas del plano de frecuencias, es decir:

$$D(u,v) = (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (2.3.8)$$

La sección transversal de un filtro pasa baja viene caracterizada por el punto de transición entre $H(u,v)=1$ y $H(u,v)=0$, punto que se denomina *frecuencia de corte*. El brusco corte de frecuencias de un filtro de pasa baja ideal no se puede realizar a base de componentes electrónicas, aunque ciertamente puede ser simulado en una computadora.

Debido a que los bordes y demás cambios bruscos de los niveles de gris están relacionados con las componentes de alta frecuencia, puede lograrse el realce de la imagen en el

dominio de la frecuencia mediante un procedimiento de *filtrado pasa alta*, que atenúa las componentes de baja frecuencia sin modificar la información de la transformada de Fourier contenida en las componentes de alta frecuencia.

Un *filtro ideal pasa alta* bidimensional es aquel cuya función de transferencia verifica la relación (2.3.9):

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \geq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) < D_0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

donde D_0 es una cantidad especificada no negativa (frecuencia de corte) y $D(u,v)$ es la distancia desde el punto (u,v) al origen de coordenadas del plano de frecuencias.

Al igual que en el caso del filtro ideal de pasa baja, el filtro ideal pasa alta no es físicamente realizable.

El filtro ideal se caracterizaba porque presentaba una gran discontinuidad que establecía un corte claro entre las frecuencias transmitidas y las filtradas. Evidentemente dicha situación es la ideal. Un filtro que se corresponde más con la realidad es el no ideal y dentro de éstos el denominado de Butterworth. Dicho filtro se va a caracterizar por la desaparición de la discontinuidad brusca que separa las frecuencias permitidas y las no permitidas y que se convertirá en una función en donde los cambios se producen sin brusquedad.

El *filtro de Butterworth pasa baja* de orden n y con una frecuencia de corte D_0 viene dado por la siguiente función (2.3.10) de transferencia.

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)}{D_0} \right]^{2n}} \quad (2.3.10)$$

Cuanto mayor es n (orden del filtro) más se parece al ideal (el cambio es más brusco). Los valores que toma el filtro en las regiones de pasa banda y eliminada siguen siendo 1 y 0, respectivamente, mientras que las regiones entre ambas quedan atenuadas. En la frecuencia de

corte, el valor de la respuesta de frecuencia es 0.5, ésta es la definición de la frecuencia de corte usada en diseño del filtro.

El *filtro de Butterworth pasa alta* de orden n y con una frecuencia de corte D_0 viene dado por la función (2.3.12.5) de transferencia:

$$H(u, \nu) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, \nu)} \right]^{2n}} \quad (2.3.11)$$

Cuanto mayor es n (orden del filtro) más se parece al ideal (el cambio es más brusco). Los valores que toma el filtro en las regiones de pasa banda y eliminada siguen siendo 1 y 0, respectivamente, mientras que las regiones entre ambas quedan atenuadas. En la frecuencia de corte, el valor de la respuesta de frecuencia es 0.5, ésta es la definición de la frecuencia de corte usada en diseño del filtro. [4]

2.3 Encriptación de imágenes Digitales

La encriptación consiste en enredar un mensaje con una fórmula matemática irremediabilmente complicada, volviéndolo ilegible a cualquiera, salvo las personas que tengan la clave secreta para decodificar el mensaje.

Para enviar un mensaje encriptado, el remitente debe conocer la clave pública del destinatario. Una vez que se encripta el mensaje, sólo el destinatario puede decodificarlo con su clave privada. Es algo así como una bóveda pública con las llaves colgadas cerca de la puerta. Cualquiera puede pasar por ahí, dejar un paquete en la bóveda y cerrarla, pero sólo podrá ser abierta por la persona que tenga la clave privada.

La **criptología** se encarga del estudio y práctica de los diferentes sistemas de cifrado o encriptación, destinados a ocultar el contenido de los mensajes, y de los sistemas de descifrado o "desencriptación", destinados a descubrir el contenido de los mismos.

2.3.1 Criptografía y criptoanálisis

Estrechamente ligado a la criptografía está el criptoanálisis, que es la técnica de desencriptar o descifrar los textos cifrados (criptogramas). Estaríamos hablando de los métodos con los que cuentan esas terceras personas que no deseamos que accedan a nuestro mensaje, para

descifrar el contenido del mismo. Y, por lo tanto, los métodos de encriptación, lo que intentarán es ponérselo lo más difícil posible a estas personas, los criptoanalistas.

En la actualidad las técnicas de encriptación emplean operaciones matemáticas complejas para lograr que el intercambio de información en una red insegura por definición, como es Internet, intranet entre otros, sea cada vez más segura.

La criptografía ha evolucionado y gracias a la aparición de los ordenadores, el avance en las matemáticas y a las nuevas necesidades de seguridad, se hizo digital.

2.4 Aspectos que definen una comunicación segura a través de Internet

Autenticidad, la seguridad de que los que intervienen en el proceso son quienes dicen ser;

Confidencialidad, la seguridad de que los datos del mensaje permanecen ocultos a terceros durante la transmisión;

Integridad, la seguridad de que los datos no sufren manipulación durante su viaje; y el no repudio, la persona que envía el mensaje, una vez enviado, no puede negar haber sido su autor.

De este modo surgen nuevos sistemas criptográficos, más complejos, que se han clasificado en dos tipos: los de clave o llave simétrica y los de clave o llave asimétrica.

➤ **Criptografía simétrica de clave secreta**

Se basa en que emplea la misma clave para encriptar que para desencriptar, y entonces se habla de algoritmo de cifrado simétrico. La clave debe ser conocida tanto por el emisor como el receptor del mensaje y ambos deben mantenerla en estricto secreto, ya que si se conoce peligraría el contenido del mensaje.

Este sistema no es el más seguro, ya que su longitud de clave es de 56 bits. Cuanto mayor sea la clave más seguridad proporcionará. Por este motivo, este sistema se considera actualmente poco práctico.

Ventajas: Estos sistemas, pese a no ser del todo seguros, cuentan con la ventaja de la simplicidad y la rapidez.

Desventajas: Los sistemas de cifrado simétrico cuentan con desventajas como son la distribución de las claves y la dificultad de almacenar y proteger muchas claves diferentes.

➤ **Criptografía asimétrica o de llave pública**

La criptografía de clave o llave pública se basa en que emplea dos llaves diferentes: una para el cifrado (clave pública) y otra para el descifrado (clave privada). La clave pública está a disposición de todo el mundo en Internet y la privada sólo la conoce su propietario. Estas llaves son una secuencia bastante compleja de caracteres y de números.

Con este sistema, para enviar un mensaje con seguridad, lo que hace el emisor es encriptarlo con la clave pública del receptor y lo envía. El documento viajará seguro por la Red, ya que sólo se puede descifrar con la clave privada que sólo conoce el receptor.

Otra utilidad de este sistema es que proporciona autenticación para mensajes. La clave privada del remitente puede emplearse para encriptar un mensaje firmándolo. Entonces se genera una firma digital, que el destinatario o cualquier otra persona puede comprobar al descifrarla con la clave pública del remitente. Así se demuestra el origen del mensaje y que no ha sido alterado por nadie. No es posible falsificar un texto firmado. [6]

CAPITULO III

ANÁLISIS DE LA ENCRIPCIÓN DE IMÁGENES DIGITALES USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y SU FRACCIONAL

3.1 Introducción

Con el avance de las telecomunicaciones ópticas, se hace necesario crear sistemas que permitan proteger la información, para tal propósito, los sistemas ópticos combinados con técnicas criptográficas son buena alternativa. Con el surgimiento de la transformada fraccional de Fourier empleado se adiciona un alto de complejidad al sistema encriptado- decriptado.

Durante la década pasada, diversos sistemas de encriptación de imágenes óptico-digitales han sido propuestos. Entre ellos los más comunes son la codificación de la fase aleatoria en el dominio de Fourier y más recientemente en el dominio de la transformada fraccional. Sin embargo, recientemente notamos que las transformadas de Fourier fraccionales pueden dar diferentes formas de encriptar la información bidimensional. La aplicación de métodos para seguridad constituye una alternativa atractiva por el uso de procedimientos electrónicos debido a la operación en paralelo y producto espacio ancho de banda alto de los métodos ópticos. Estos son especialmente útiles para el procesamiento de información tales como imágenes y hologramas. En general, las técnicas de seguridad óptico-digitales involucran un procesador óptico que encripta, desencripta o autentiza la información codificada como una imagen bidimensional.

3.2 Series de Fourier

La serie de Fourier de $f(x)$ se define por la función (3.2.1)

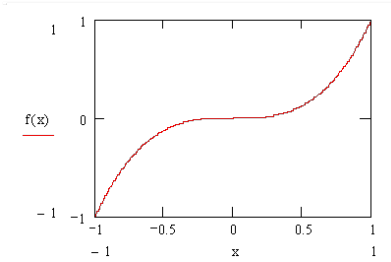
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{Sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.2.1)$$

donde las a y b son llamados coeficientes de Fourier

Tal que:
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \quad \text{talque } T=2L$$

y
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx$$

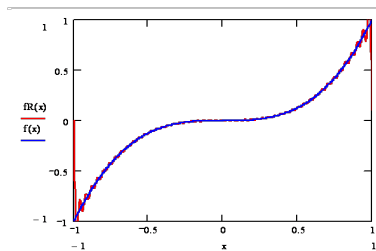
Donde: $f(x) := x^3$



Se tiene que la función 3.2.2.

$$f(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (3.2.2)$$

Donde $N=50$



3.3 Transformada Discreta de Fourier

Transformada de una función rectangular. La función cuadrada de dos dimensiones se define como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{por otra parte} \end{cases}$$

La cual se muestra en la en la grafica de la figura 3.1 a

De la ecuación 2.17 se calcula la transformada de Fourier la cual esta dada por:

$$f(\lambda, \eta) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-i2\pi(x\lambda+y\eta)} dx dy$$

Integrando resulta que:

$$f(\lambda, \eta) = \int_{-a}^a e^{-i2\pi x\lambda} dx \int_{-b}^b e^{-i2\pi y\eta} dy$$

Resolviendo la integral se obtiene la siguiente función:

$$f(\lambda, \eta) = 4A \operatorname{sinc}\left(\frac{k\lambda}{f}\right) a \operatorname{sinc}\left(\frac{k\lambda}{f}\right) b$$

Tal que A=a,b, donde A es una constante proporcional.

Su intensidad es $I(\lambda, \eta) = \varphi(\lambda, \eta) \varphi^*(\lambda, \eta)$

$$= 16 A^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k\lambda}{f}\right) a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k\lambda}{f}\right) b$$

Obteniendo la transformada de Fourier de la función cuadrada figura a obtenemos la siguiente función representada en la figura b.

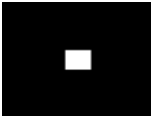
Utilizando la función cuadrática en el programa de Mathcad obtenemos el siguiente programa para obtener la imagen digital.

```

cuadro(N,M,ex1,ex2,a,b) :=
| b ← b
| a ← a
| ex1 ← ex1
| ex2 ← ex2
| N ← N
| M ← M
| for i ∈ 0.. N - 1
|   for j ∈ 0.. M - 1
|      $x_j \leftarrow ex1 + \frac{j}{N-1} \cdot (ex2 - ex1)$ 
|      $x_i \leftarrow ex1 + \frac{i}{M-1} \cdot (ex2 - ex1)$ 
|      $E_{i,j} \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } (-a \leq x_j \leq a) \wedge (-b \leq x_i \leq b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
|      $F_{i,j} \leftarrow \log \left[ 1 + \left( \overrightarrow{(|E_{i,j}|)^2} \right) \right]$ 
|   F ← scale(F,0,255)
| F

```

El resultado de la corrida del programa se obtiene la siguiente función cuadro en la imagen siguiente:



cuadro (64,64,-32,31,5,5)

Figura 3.1 Cuadro obtenido en Mathcad

Utilizando la transformada Discreta de Fourier en Mathcad tenemos lo siguiente:

.....

m := 0.. M - 1

n := 0.. N - 1

$$X_{n,m} := \left[\prod_{z=0}^{N-1} \prod_{l=0}^{M-1} \left[(E_{z,l}) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \left(m \cdot \frac{z}{N-1} + n \cdot \frac{l}{M-1} \right)} \right] \right]$$

$$S := \left| \log \left[1 + \left(|X_{n,m}| \right)^2 \right] \right|$$

$$S := \text{scale}(S, 0, 255)$$

$$R := \text{center}(S)$$

$$R := \text{Re}(R)$$

Después de utilizar la ecuación matemática se obtiene la siguiente figura 3.2.

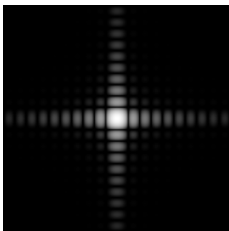


Figura 3.2 Figura obtenida mediante Fourier

Se pueden observar los resultados obtenidos en las figuras 3.1 y 3.2 que cambios se realizan de una imagen geométrica simple a transformarla a través de la Transformada de Fourier.

Se observan distintas formas de funciones en imágenes geométricas utilizando la transformada Discreta de Fourier, verificándose mediante corridas en programa Mathcad utilizándose funciones y observándose dichos cambios en las imágenes digitales:

Triángulo bidimensional

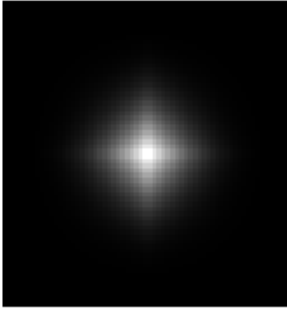
$$z := 0..N-1 \quad l := 0..M-1$$

$$b := 1 \quad a := -1$$

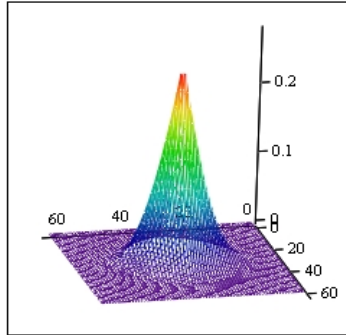
$$x_z := a + \frac{z}{N-1} \cdot (b-a) \quad y_l := b - \frac{l}{M-1} \cdot (b-a)$$

$$E_{z,l} := \begin{cases} \left[\left[1 - (|x_z|) \right]^2 \cdot (1 - |y_l|)^2 \right] & \text{if } (|x_z|) \leq 1 \wedge |y_l| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

$$F_{z,1} := \log \left[1 + \overrightarrow{\left((|E_{z,1}|)^2 \right)} \right]$$



F



F

Figura 3.3 Triangulo bidimensional y su grafica obtenidas mediante Mathcad.

TDF Triangulo bidimensional de la función (3.3.2)

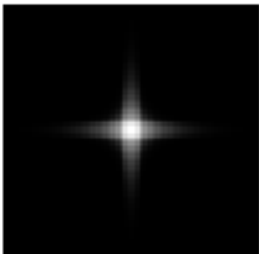
$$X_{n,m} := \left[\prod_{z=0}^{N-1} \prod_{l=0}^{M-1} (E_{z,1}) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \left(m \cdot \frac{\cdot}{N-1} + n \cdot \frac{\cdot}{M-1} \right)} \right]$$

(3.3.2)

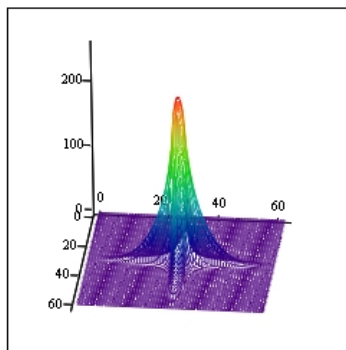
$$S := \overrightarrow{\left[\sqrt{1 + \left((|E_{z,1}|)^2 \right)} \right]}$$

$$R := \text{center}(S)$$

$$R := \text{Re}(R)$$



R



R

Figura 3.4 Triángulo bidimensional y su gráfica obtenidas mediante Mathcad. Mediante la transformada discreta de Fourier.

- Semicírculo bidimensional Función (3.3.3)

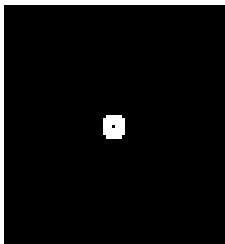
$$a := -32 \quad b := 31$$

$$z := 0..N - 1$$

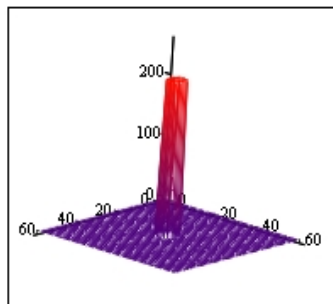
$$x_z := a + \frac{z}{N - 1} \cdot (b - a) \quad y_1 := b - \frac{z}{M - 1} \cdot (b - a)$$

$$E_{z,1} := \begin{cases} 1 & \text{if } \left[\begin{array}{l} 0 < \left(\operatorname{atan} \left(\frac{y_1}{x_z} \right) \right) < \pi \\ 0 < \sqrt{(x_z)^2 + (y_1)^2} < 4 \end{array} \right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$$F_{z,1} := \log \left[1 + \left(\left| \overrightarrow{E_{z,1}} \right|^2 \right) \right]$$



F



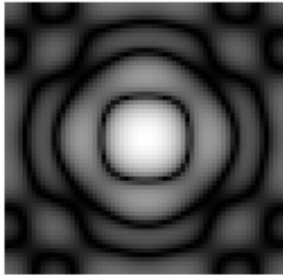
F

Figura 3.5 Semicírculo bidimensional y su gráfica obtenidas mediante Mathcad.

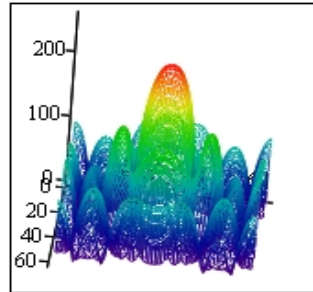
TDF Semicírculo bidimensional (de la función (3.3.4))

$$X_{n,m} := \left[\prod_{z=0}^{N-1} \prod_{l=0}^{M-1} (E_{z,l}) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \left(m \cdot \frac{\dots}{N-1} + n \cdot \frac{\dots}{M-1} \right)} \right] \quad (3.3.4)$$

$\overrightarrow{S} := \text{scale}(S, U, ZSS)$
 $R := \text{center}(S)$ $\overrightarrow{R} := \text{Re}(R)$



R



R

Figura 3.6 Semicírculo bidimensional y su grafica obtenidas mediante Mathcad. Mediante la transformada discreta de Fourier.

3.4 Transformada de Fourier

Se tiene que la transformada de Fourier (3.4.1) es: $F(u, v) = \mathfrak{T}\{f(x, y)\}$

Y que
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i2\pi(xu + yv)} dx dy$$

donde $e^{-jx} = \cos(x) + i \text{sen}(x)$

(3.4.1)

Es una descomposición de la imagen en estructuras periódicas. Las variables u y v se llaman frecuencias absolutas. También se pueden utilizar las variables $\omega_1 = 2\pi u$ y $\omega_2 = 2\pi v$, que se llaman frecuencias angulares.

Su magnitud se llama espectro de Fourier: $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$, se muestra en

la fig.3.4.1

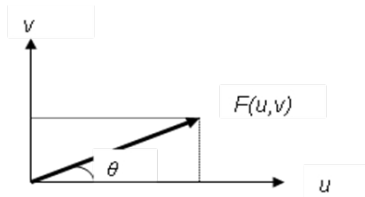


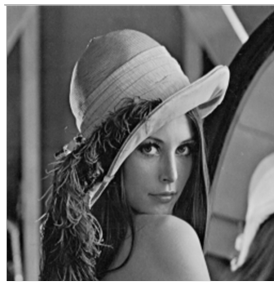
Fig 3.7. Espectro de Fourier F(u,v)

El ángulo de fase : $\theta(u, v) = \arctan g \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$

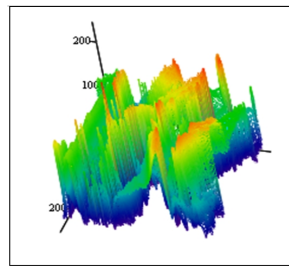
Se tiene $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ donde

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$

Utilizando la función de la ecuación Mathcad se obtienen los siguientes resultados de la imagen discreta de Lena (Fig. 3.8):



M

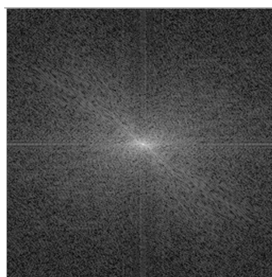


M

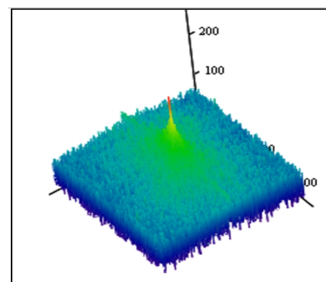
Figura 3.8. Imagen Lena

Grafica Lena

Si le aplicamos la transformación de Fourier (fig. 3.9.) obtendremos la imagen junto con su grafica .



R



R

Figura 3.9 Transformada Fourier Lena

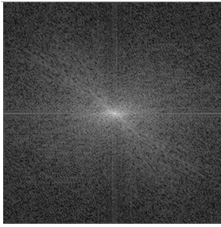
Grafica Transformada de Fourier Lena

3.5 Transformada Inversa de Fourier

Se tiene la Transformada Inversa de Fourier $f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu + yv)} du dv$

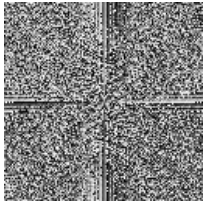
La Interpretación de la Transformada de Fourier, nos da los coeficientes de ponderación en las diferentes frecuencias de las funciones exponenciales complejas (patrones sinusoidales) que nos conducen al valor de la función $f(x, y)$ como límite de estas sumas ponderadas.

Se tiene $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ donde $f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$



R

Se obtiene la sig. Figura 3.9 :



M

Imagen de Lena

Figura 3.10 Transformada Inversa de Fourier.

Se verifica que a través de la inversa de Fourier para poder realizar el descryptado de la imagen obtenida de la transformada de Fourier se realiza en tres pasos mediante funciones matemáticas, en ese caso su Inversa de Fourier, dando como resultado la obtención de la imagen inicial, de la figura 3.8.

3.6 Propiedad del escalamiento de Fourier

Se tiene la siguiente función $\tilde{f}(ax, by) = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$

De la imagen M se calcula su escalamiento de Fourier cual se obtiene programando en mathcad la imagen digital R:

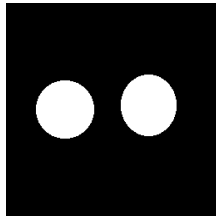


Imagen M

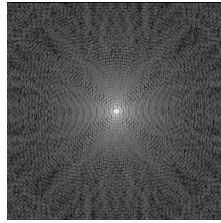


Imagen R

Figura 3.11 Propiedad de escalamiento de Fourier.

3.7 Serie Hermitegauss 2D

Analizando Gauss-Hermite se tiene la siguiente ecuación (3.7.1):

$$H_i := \sum_{s=0}^i (-1)^s \frac{m! \cdot (2 \cdot y_i)^{m-2s}}{s! \cdot (m-2s)!} \quad H_j := \sum_{r=0}^j (-1)^r \frac{n! \cdot (2 \cdot x_j)^{n-2r}}{r! \cdot (n-2r)!} \quad (3.7.1)$$

Donde se verifica en el programa de Mathcad profesional la ecuación anterior:

$$N := 100 \quad b := 1$$

$$i := 0..M-1 \quad j := 0..N-1$$

$$x_j := a + j \cdot \frac{\text{width}}{N-1} \quad y_i := b - i \cdot \frac{\text{height}}{M-1}$$

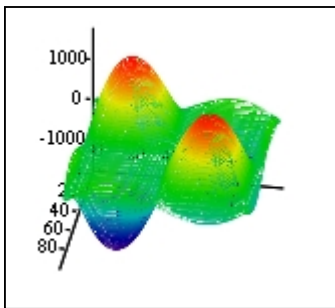
$$q := \frac{m}{2} \quad p := \frac{n}{2}$$

$$H_i := \sum_{s=0}^v (-1)^s \frac{m! \cdot (2 \cdot y_i)^s}{s! \cdot (m - 2s)!}$$

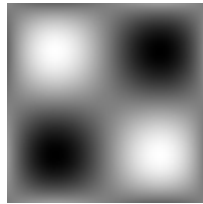
$$H_j := \sum_{r=0}^u (-1)^r \frac{n! \cdot (2 \cdot x_j)^{n-2r}}{r! \cdot (n - 2r)!}$$

$$\text{her}_{i,j} := H_i \cdot H_j$$

$$A := \text{scale}(\text{her}, 0, 255)$$



her



A

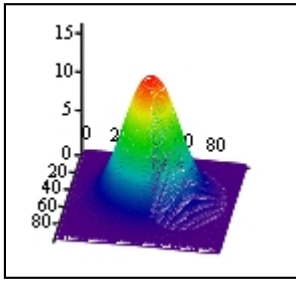
Figura 3.12 Serie Hermitegauss 2D A.

$$g_i := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\left[\frac{-(y_i)^2}{2 \cdot \sigma} \right]}$$

$$g_j := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\left[\frac{-(x_j)^2}{2 \cdot \sigma} \right]}$$

$$\text{gaus}_{i,j} := g_i \cdot g_j$$

$$B := \text{scale}(\text{gaus}, 0, 255)$$



gaus



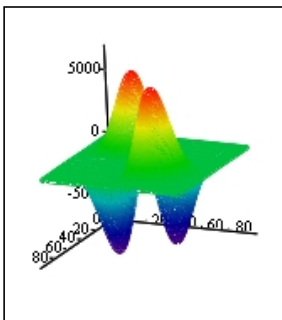
B

Figura 3.13 Serie Hermitegauss 2D B.

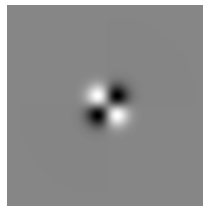
```

gh := scale(gh, 0, 255)

```



gh



C

Figura 3.14 Serie Hermitegauss 2D C.

En las figuras 3.12, 3.13 y 3.14 se muestra como es aplicable las series de hermitegauss 2D y la diferencia en los cambios en la figura digital.

3.8 Análisis de la transformada Fraccional de Fourier

Proponemos un algoritmo de encriptación de imágenes basado en la transformada de Fourier fraccional. Se encripta y desencripta la imagen de entrada mediante la ejecución de la transformada de Fourier multifraccional en dos pasos. Se presentan los resultados de simulaciones numéricas para verificar el algoritmo, así como la implementación de un sistema óptico digital para llevar a cabo la transformación

Esta es una generalización de la transformada de Fourier ordinaria con un parámetro de orden a . Matemáticamente, la transformada de Fourier fraccional de orden a -ésimo o denotada por \mathfrak{F}^a es la potencia a -ésima de la operación transformada de Fourier ordinaria \mathfrak{F} .

Así que la transformada de Fourier a -ésima de una función $f(x, y)$ es igual a $\mathfrak{F}^a [f(x, y)]$ o simplemente $\mathfrak{F}^a \{f\}$ (función 3.8.1). Si $a=1$, $\mathfrak{F} \{f\}$ es la transformada clásica definida como:

$$(\mathfrak{F}^1 f)(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) * i \exp\{-i2\pi(x'x + y'y)/s^2\} dx dy .$$

i

(3.8.1)

La transformada de Fourier fraccional ha sido empleada exitosamente en el estudio de sistemas ópticos, como óptica de Fourier, con aplicaciones al procesamiento de información óptica, permitiendo una formulación en esta área en forma mucho más general.

Uno de los postulados para operar con la FRT es el siguiente (función 3.8.2):

$$\mathfrak{F}^a [\mathfrak{F}^b f] = \mathfrak{F}^a \mathfrak{F}^b f = \mathfrak{F}^b \mathfrak{F}^a f = \mathfrak{F}^{a+b} f$$

(3.8.2)

3.8.1 Transformada Fraccional de Fourier

Convencionalmente el ath el orden de la FRT de $f_a(x_a)$ de una función $f_0(x_0)$ es calculada usando el kernel de la transformada de integración, ecuación 3.8.3:

$$=A_{Px}A_{Py}\Delta x_0\Delta y_0$$

$$f_{0,0}(l_x\Delta x_0, l_y\Delta y_0) \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_x\Pi}{2}\right)\left[(l_x\Delta x_0)^2+(m_x\Delta x_{p_x})^2\right]-j2\Pi\frac{l_x m_x}{N_x}\right\}$$

$$\times \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_y\Pi}{2}\right)\left[(l_y\Delta x_0)^2+(m_y\Delta y_{p_y})^2\right]-j2\Pi\frac{l_y m_y}{N_y}\right\}$$

$\dot{\imath}$
right
 $\dot{\imath}$
 $\dot{\imath}$
 $\dot{\imath}$
 $\dot{\imath}$
 $\dot{\imath}$
 $[\dot{\imath}]\dot{\imath}$

$\dot{\imath}$

$$\sum_{l_x=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \dot{\imath}$$

$$\sum_{l_y=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \dot{\imath}$$

(3.8.4)

donde $f_{0,0}(l_x\Delta x_0, l_y\Delta y_0)$ es la función discreta con la transformada, y l_x, l_y tienen el siguiente rango:

$$-\frac{N_x}{2} \leq l_x \leq \frac{N_x}{2} - 1 \quad \text{y} \quad -\frac{N_y}{2} \leq l_y \leq \frac{N_y}{2} - 1 \tag{3.8.5}$$

Δx_0 y Δy_0 los intervalos están simplificando la dirección de la función de x y y respectivamente, Δx_{p_x} , Δy_{p_y} están simplificando los valores de la FRT que están definidos en la ecuación 3.8.7

La representación puede verse retribuida para el p th de la FRT usando la inversa de la siguiente relación:

$$f_{0,0}(n_x \Delta x_0, n_y \Delta y_0) = F_{p_x, p_y} \{ f_{p_x, p_y}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta y_{p_y}) \} (n_x \Delta x_0, n_y \Delta y_0)$$

$$= A^{-p_x} A^{-p_y} \Delta x_{p_x} \Delta y_{p_y}$$

$$f_{0,0}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta y_{p_y}) \exp \left\{ -j\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) [(n_x \Delta x_0)^2 + (m_x \Delta x_{p_x})^2] + j2\pi \frac{n_x m_x}{N_x} \right\} \\ \times \exp \left\{ j\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) [(n_y \Delta y_0)^2 + (m_y \Delta y_{p_y})^2] - j2\pi \frac{n_y m_y}{N_y} \right\}$$

$\dot{\imath}$
ri
 $\dot{\imath}$
 $\dot{\imath}$
 $\dot{\imath}$
 $\dot{\imath}$
 $[\dot{\imath}] \dot{\imath}$

$\dot{\imath}$

$$\sum_{m_x = -\frac{N_x-1}{2}}^{\frac{N_x-1}{2}} \dot{\imath} \\ \sum_{m_y = -\frac{N_y-1}{2}}^{\frac{N_y-1}{2}} \dot{\imath}$$

(3.8.6)

para la teoría de la señal digital podemos determinar el siguiente criterio:

$$\Delta x_{p_x} = \frac{\sin\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right)}{N_x \Delta x_0} \quad y \quad \Delta x_{p_x} = \frac{\sin\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right)}{N_y \Delta y_0} \quad (3.8.7)$$

Usando el modelo discreto de la FRT la correlación de propiedades se definen como:

$$\begin{aligned} & \sum_{l_y = -\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{l_x = -\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} [f_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) f_{0,0}[(l_x + k_x) \Delta x_0, (l_y + k_y) \Delta y_0]] \exp\left\{j2\Pi \cot\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right) l_x k_x (\Delta x_0)^2\right\} \\ & x \exp\left\{j2\Pi \cot\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right) l_x k_x (\Delta x_0)^2\right\} = \frac{|\sin\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right)| |\sin\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right)|}{N_x \Delta x_0^2 N_y \Delta x_0^2} \\ & x \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right) k_x^2 (\Delta x_0)^2\right\} \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right) k_y^2 (\Delta x_0)^2\right\} \\ & x \sum_{m_y = -\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{m_x = -\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} |f_{p_x p_y}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta y_{p_y})|^2 \exp\left\{j2\Pi \cot\left(\frac{k_y m_y}{N_y}\right)\right\} \exp\left\{j2\Pi \cot\left(\frac{k_x m_x}{N_x}\right)\right\} \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

CAPITULO IV

ALGORITMO DE LA ENCRIPCIÓN DE IMÁGENES USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y SU FRACCIONAL

4.1 Introducción

La transformada discreta de Fourier es de cómputo intensivo requiriendo multiplicaciones N^2 complejas para un conjunto de N elementos. Se agrava este problema al trabajar con datos bidimensionales, como las imágenes. Una imagen del tamaño $M \times M$ requerirá $(M^2)^2$ o M^4 multiplicaciones complejas. Afortunadamente, se descubrió que la transformada discreta de Fourier de longitud N se podría reescribir como la suma de dos transformadas de Fourier de longitud $N/2$. Este concepto se puede aplicar recurrentemente al conjunto de datos hasta que se reduce a transformadas de solamente dos puntos.

Esta técnica de división y conquista se conoce como la transformada rápida de Fourier (FFT), que reduce el número de multiplicaciones complejas de N^2 al orden $N \log_2 N$. Estos ahorros son especialmente substanciales en el procesamiento de imagen. La FFT es separable, lo que incluso vuelve las transformadas de Fourier más fáciles de hacer. Debido a la separabilidad, podemos reducir la operación de FFT de una operación bidimensional a dos operaciones unidimensionales. Primero procesamos la FFT de las filas de una imagen y en seguida seguimos con la FFT de las columnas. Para una imagen del tamaño $M \times N$, esto requiere $N + M$ FFTs para ser computadas. Del orden de $NM \log_2 NM$ cálculos son requeridos para transformar nuestra imagen.

Se debe recordar que la FFT no es una transformada diferente de la DFT, pero sí una familia de algoritmos más eficientes para lograr la transformada de datos. Generalmente cuando uno acelera un algoritmo, esta aceleración viene con un coste, con la FFT, el coste es complejidad. Hay complejidad en la ejecución de la contabilidad y del algoritmo. Los ahorros de cómputo, sin embargo, no se realizan a expensas de la exactitud.

4.2 Algoritmo de la transformada de Fourier

Se muestran los métodos para realizar la transformada Fourier a través de imágenes bidimensionales

Inicio de la transformada de Fourier

Extracción de los pixeles de la imagen a la cual se le hará la FFT

PixelGrabber grabber PixelGrabber(imagen,0,0,N,N,pix_origen,0,N)

Verifica que grabber.grabPixels()

Si no es correcto imprima “ ”

h=0;

para t=0 sea t<N y t→incrementa

para u=0 sea u<N u→incrementa

matriz_real[t][u]= pix_origen[h]

matriz_imaginario[t][u]=0

h→incrementa;

Escalamos los pixeles obtenidos, para que tengan un rango entre 0 y 255. Así nos aseguramos que no se produzca desbordamiento al aplicar el procesado.

matriz_real=escalar(matriz_real)

Procesado de la FFT de los pixeles extraídos y escalados.

Primera pasada por la FFT(filas)

Para j=0 sea j<N j→incrementa //el índice j son las filas

Sacamos de una en una las filas de la matriz de pixeles y las desplazamos N/2.

In_real[]

In_imaginario[]

para i=0 sea i<N i→incrementa

*In_real[i]=(matriz_real[j][i]*cos(PI*i))+*

*(matriz_imaginario[j][i]*sin(PI*i))*

*In_imaginario[i]=(matriz_real[j][i]*sin(PI*i)+(matriz_imaginario[j][i]*cos(PI*i))*

}

Comienzo de la inversión de bits

Out_real[]

Out_imaginario[]

para k=0, khat=0 sea k<N k→incrementa) {

Out_real[khat]=In_real[k]

Out_imaginario[khat]=In_imaginario[k]

para (bit=N/2 sea (khat & bit)!=0 se tien bit >>=1)

khat ^= bit;

khat ^= bit;

fin de la inversión

calculo de la fft de la fila j de la matriz de pixeles

```
para n=2 sea n<=N se tiene n <<= 1) {
w=2*PI/n
para m=0 sea m<N se tiene m+=n) {
    para x=0 sea x<n/2 se tiene x→incrementa) {
        y_real=Out_real[m+x]
        y_imaginario=Out_imaginario[m+x];
        z_real=numeroreal_real[m+x+n/2] * cos(x*w)+
numero_imaginario[m+x+n/2]*sin(x*w)
        z_imaginario=-(Out_real[m+x+n/2]) * sin(x*w)+
Out_imaginario[m+x+n/2]*cos(x*w)
        Out_real[m+x]=(y_real+z_real)/2
        Out_imaginario[m+x]=(y_imaginario+z_imaginario)/2
        Out_real[m+x+n/2]=(y_real-z_real)/2
        Out_imaginario[m+x+n/2]=(y_imaginario-z_imaginario)/2;
```

metemos el resultado de la FFT de la fila en su fila correspondiente en la matriz

```
para r=0 sea r<N r→incrementa){
matriz_real[j][r]=Out_real[r];
matriz_imaginario[j][r]=Out_imaginario[r]
```

Segunda pasada por la FFT(columnas)

```
para j=0 sea j<N j→incrementa){//el indice j son las columnas
```

Sacamos de una en una las columnas de la matriz de pixeles y las desplazamos N/2.

```
para i=0 sea i<N i→){
In_real[i]=(matriz_real[i][j]*cos(PI*i)+(matriz_imaginario[i][j]*sin(PI*i))
In_imaginario[i]=(-matriz_real[i][j]*sin(PI*i)+(matriz_imaginario[i][j]*cos(PI*i));
```

Comienzo de la inversion de bits

```
para k=0, khat=0 sea k<N k→incrementa)
    Out_real[khat]=In_real[k];
    Out_imaginario[khat]=In_imaginario[k];
para bit=N/2 sea (khat & bit)!=0 se tiene bit >>=1)
    khat ^= bit;
    khat ^= bit;
```

fin de la inversión

calculo de la fft de la columna j de la matriz de pixeles

para n=2 sea n<=N se tiene n <<= 1)

*w=2*PI/n;*

para m=0 sea m<N se tiene m+=n)

para x=0 sea x<n/2 x→incrementa)

y_real=Out_real[m+x];

y_imagenario=Out_imagenario[m+x]

*z_real=Out_real[m+x+n/2] * cos(x*w)+*

Out_imagenario[m+x+n/2] StrictMath.sin(x*w);*

*z_imagenario=-(Out_real[m+x+n/2]) * sin(x*w)+*

Out_imagenario[m+x+n/2] StrictMath.cos(x*w);*

Out_real[m+x]=(y_real+z_real)/2;

Out_imagenario[m+x]=(y_imagenario+z_imagenario)/2

Out_real[m+x+n/2]=(y_real-z_real)/2

Out_imagenario[m+x+n/2]=(y_imagenario-z_imagenario)/2

metemos el resultado de la FFT de la columna en su columna correspondiente en la matriz

para r=0 sea r<N r→incrementa){

matriz_real[r][j]=Out_real[r]

matriz_imagenario[r][j]=Out_imagenario[r]

fin de la segunda pasada

Hacemos el modulo y la fase de la FFT

para g=0 sea g<N g→incrementa)

para f=0 sea f<N f→incrementa){

*El método atan2 devuelve valores entre -pi y pi, con lo que hay que sumarle pi a los valores que se sitúan en el tercer y 4º cuadrante cuadrante hay que sumarle 2*pi para tener los valores absolutos de la fase*

matriz_fase[g][f]=atan2(matriz_imagenario[g][f],matriz_real[g][f]);

si (matriz_fase[g][f]<0)

*matriz_fase[g][f]=matriz_fase[g][f]+(2*PI)*

dividimos por el log de 10,para conseguir el logaritmo en base 10,ya que el método log nos hace el logaritmo natural (base e)

*matriz_modulo[g][f]=log(1+100*raiz_cuadrada(pow(matriz_real[g][f],2)+*

$\text{pow}(\text{matriz_imaginario}[g][f],2))/\log(10)$

metemos los pixeles de la matriz modulo y la matriz fase en la imagen modulo y fase respectivamente

para $d=0$ sea $d < N$ $d \rightarrow$ incrementa)

para $p=0$ sea $p < N$ $p \rightarrow$ incrementa)

$\text{pix_destino1}[h]=\text{matriz_modulo}[d][p]$

$\text{pix_destino2}[h]=\text{matriz_fase}[d][p]$

$h \rightarrow$ incrementa;

}

}

$\text{pix_destino1}=\text{colorear}(\text{pix_destino1})$

$\text{pix_destino2}=\text{colorear}(\text{pix_destino2})$

$\text{MemoryImageSource source1}=\text{MemoryImageSource}(N,N,\text{pix_destino1},0,N)$

$\text{modulo}=\text{createImage}(\text{source1})$

$\text{MemoryImageSource source2}=\text{MemoryImageSource}(N,N,\text{pix_destino2},0,N)$

$\text{fase}=\text{createImage}(\text{source2})$

este metodo escala los valores del array de entrada para que se correspondan con los colores que más abajo se indican

*Para $t=0$ sea $t < (N*N)$ $t \rightarrow$ incrementa*

$\text{minimo}=\min(\text{minimo},\text{arreglo}[t])$

*para $a=0$ sea $a < (N*N)$ $a \rightarrow$ incrementa)*

$\text{arreglo}[a]=\text{arreglo}[a]-\text{minimo}$

$\text{maximo}=\max(\text{maximo},\text{array}[a])$

*para $a=0$ sea $a < (N*N)$ $a \rightarrow$ incrementa*

//representacion en blanco y negro

Si $(\text{RGB}==0)$

Si $(\text{maximo}!=0)$

*$\text{array}[a]=(\text{maximo}-\text{array}[a])*255/\text{maximo} << 24$*

sino

$\text{arreglo}[a]=1 << 32;$

sino si $(\text{RGB}==1)$

representación desde el negro al rojo pasando por el azul y por el amarillo

Si $(\text{maximo}!=0)$ {

```

Si ((arreglo[a]/maximo)<=(1/3))
    arreglo[a]=255<<24|(arreglo[a]*255/maximo)<<8|
(arreglo[a]*255/maximo)
Sino
Si ((arreglo[a]/maximo)<=(2/3))
    arreglo[a]=255<<24|(arreglo[a]*255/maximo)<<16|
255<<8|(255-(arreglo[a]*255/maximo))
Sino
    arreglo[a]=255<<24|255<<16|(255-
(arreglo[a]*255/maximo))<<8
Sino
    arreglo[a]=255<<24|255<<16;
Sino
Si(maximo!=0)
    arreglo[a]=255<<24|(arreglo[a]*255/maximo)<<8|255;
Sino
    arreglo[a]=255<<24|255<<8|255;

```

Retorna arreglo;

}

Este método escala los valores de la matriz de entrada para situarlos en un rango de -128 a 127

Para $t=0$ sea $t < N$ $t \rightarrow$ incrementa

Para $u=0$ sea $u < N$ $u \rightarrow$ incrementa

$\text{minimo} = \min(\text{minimo}, \text{matriz}[t][u])$

Para $a=0$ sea $a < N$ $a \rightarrow$ incrementa

Para $b=0$ sea $b < N$ $b \rightarrow$ incrementa

$\text{matriz}[a][b] = \text{matriz}[a][b] - \text{minimo}$

$\text{maximo} = \max(\text{maximo}, \text{matriz}[a][b])$

Para $a=0$ sea $a < N$ $a \rightarrow$ incrementa

Para $b=0$ sea $b < N$ $b \rightarrow$ incrementa

Si ($\text{maximo} \neq 0$)

$\text{matriz}[a][b] = (\text{matriz}[a][b] * 255) / \text{maximo}$

Sino

$\text{matriz}[a][b] = 255$

retorna matriz

Fin del algoritmo de la transformada de Fourier

4.2.1 Resultados

Se comprobó en el laboratorio de imágenes digitales del INAOE utilizando como material: un lente una pantalla de cristal liquido, dos cámaras, una computadora y un receptor de la llegada de las imágenes, mostrándose que de forma óptica, también se observa la digitalización de una imagen dando como resultado su transformada de Fourier mostrándose en la siguiente Figura 4.1.

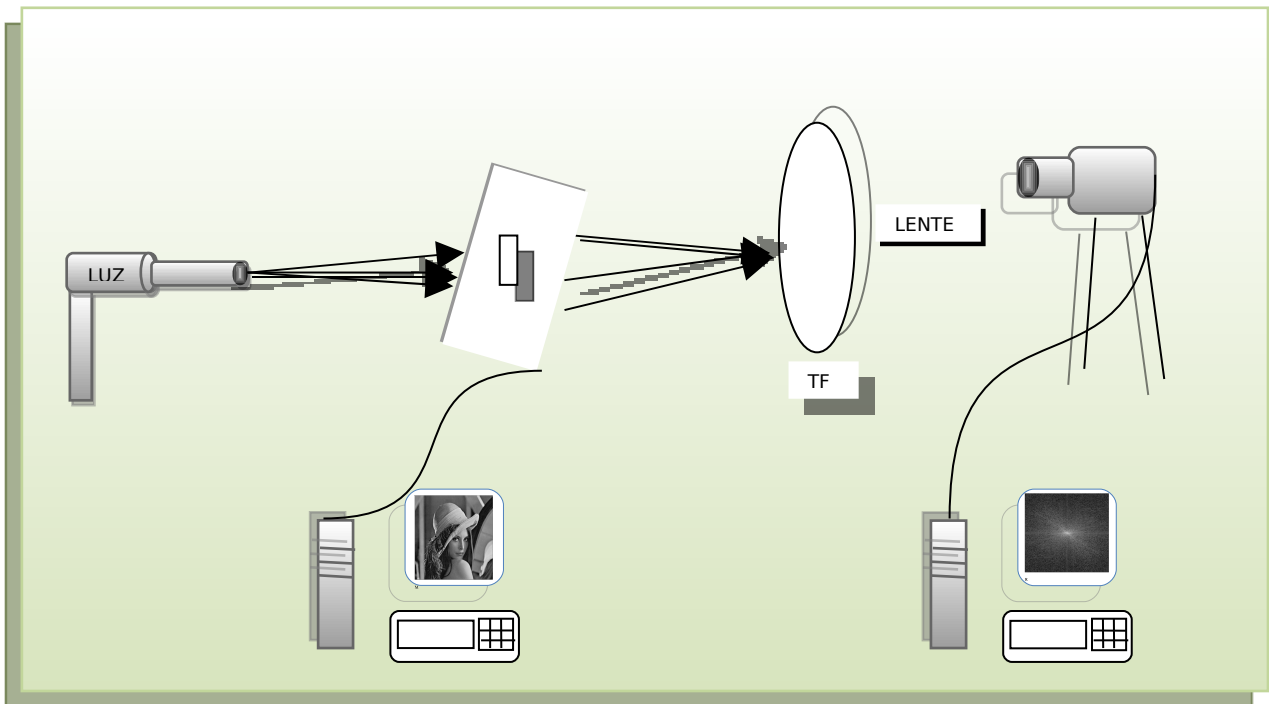


Figura 4.1 Representación Óptica para la obtención de la transformada de Fourier.

Se observa como se refleja la imagen de Lena mandándola desde una PC a un LCD que proyecta una luz mediante un rayo laser el reflejo, que se manda a través de un lente para posteriormente sea captado mediante una cámara CCD y sea capturado en otra computadora, dándonos como resultado la encriptación de la imagen digitalizada de Lena.

Posteriormente se realiza la comparación óptica, para obtener imágenes de esta misma índole desarrollando un algoritmo para obtener este mismo resultado para digitalizar imágenes encriptar y desencriptar basándose en el método de la Transformada de Fourier.

El Algoritmo de la Transformada de Fourier es desarrollado y verificado mostrando como resultado la digitalización de la imagen de Lena, obteniendo la encriptación como se muestra en la figura 4.2.

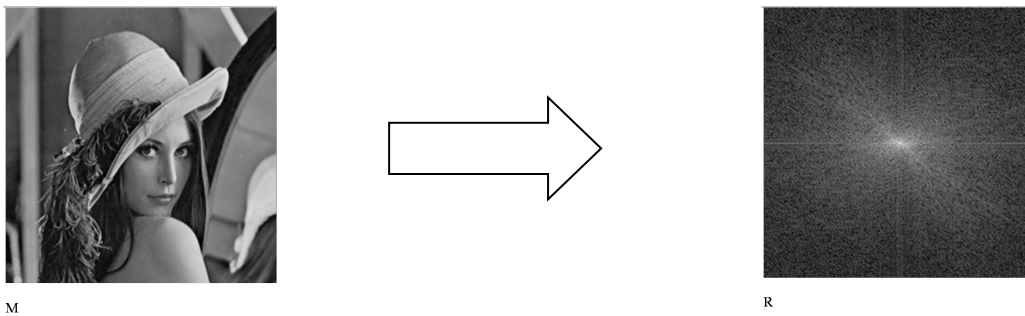


Figura 4.2 Lena y su resultado de la Transformada de Fourier.

Mostrándose su inversa de la misma imagen en siguiente figura 4.3:

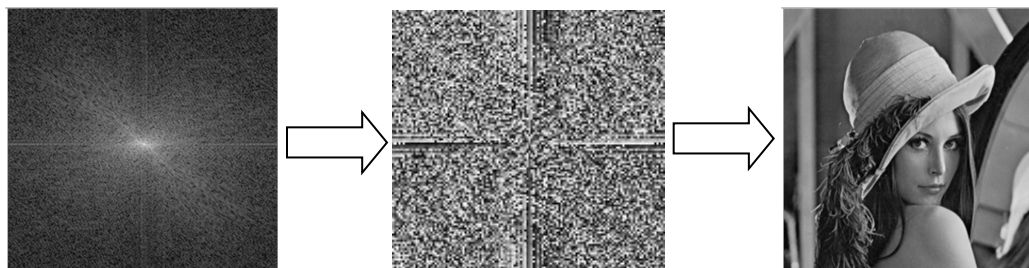


Figura 4.3 Inversa de la Transformada de Fourier para obtener la imagen original de Lena.

4.3 Algoritmo de encriptación y desencriptación de la FRT (Trasformada Fraccional de Fourier)

En esta sección se define el proceso de la encriptación y desencriptación, la encriptación es llevada por dos fases aleatorias y dos operaciones de la FTR de orden arbitrario. En este caso se aplicara por la FRT de la de la salida de la señal de la imagen y almacenamiento único de de resultados. Se repite este proceso usando la señal de la imagen en segunda fase y aplicando la segunda operación de la FRT. La desencriptación es basada en una propiedad de correlación de la FRT que deja el recorrido de la recursividad de la imagen.

4.3.1 Encriptación

Se tiene la siguiente función $g_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$, esta señal puede ser compleja, conteniendo la intensidad y la fase de información. Por consiguiente puede contener la información de dos imágenes, donde la señal de intensidad puede representar una imagen y la fase de la señal puede modularse una representación de una segunda imagen.

Cuando encriptamos estos datos usando dos FRT's y dos fases aleatorias en la forma de dos estadísticas independientes, donde la secuencia $\exp\{\phi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)\}$ y $\exp\{j\phi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)\}$, donde $\phi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$ y $\varphi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$ uniformemente distribuido en $[0, 2\pi]$.

Para encriptar la imagen realizamos lo siguiente, multiplicando la señal de salida por la primera fase aleatoria se tiene:

$$Fl_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_x \Delta x_{0y}) = g_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_x \Delta x_{0y}) \exp\{j\phi(l_x \Delta x_0, l_x \Delta x_{0y})\} \quad (4.3.1)$$

Aplicando una operación de la DFRT de orden p_x en el x-dirección y p_y en y-dirección resulta lo siguiente:

$$fl_{p_x, p_y}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta x_{p_x}) = F^{p_x, p_y} \left\{ g_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \exp\left[j\phi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \right] \right\} \quad (4.3.2)$$

Tomando la intensidad de la señal $|fl_{p_x, p_y}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta x_{p_x})|^2$ se tiene como requerimiento de encriptado del dato. El procedimiento del desencriptado requiere que su intensidad tenga una simple dimensión:

$$\Delta x_{p_x} = \frac{\sin\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right)}{2N_x \Delta x_0}, \quad \Delta y_{p_y} = \frac{\sin\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right)}{2N_y \Delta y_0}$$

(4.3.3)

Donde m_x y m_y tienen los siguientes valores de rango

$$-N_x \leq m_x \leq N_x - 1 \quad \text{y} \quad N_y \leq m_y \leq N_y - 1 \quad (4.3.4)$$

Podemos obtener su función de interpolación para la función $f_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$ por cero rellenando $f_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$ para que se extienda el rango de l_x y l_y a :

$$N_x \leq l_x \leq N_x - 1 \quad \text{y} \quad N_y \leq l_y \leq N_y - 1 \quad (4.3.5)$$

Incluyendo los ceros para la función se evalúan en los rangos:

$$-N_x \leq l_x \leq -\frac{N_x}{2} - 1, \quad \frac{N_x}{2} \leq l_x \leq N_x - 1$$

y

$$-N_y \leq l_y \leq -\frac{N_y}{2} - 1, \quad \frac{N_y}{2} \leq l_y \leq N_y - 1$$

(4.3.6)

Se obtiene la FRT mediante la función:

$$f_{l_{p_x}, p_y}(m_x 2\Delta x_{p_x}, m_y 2\Delta x_{p_y}) = A_{p_x} A_{p_y} \Delta x_0 \Delta y_0 \sum_{l_y = -\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{l_x = -\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} [f_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \times \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right) \left[(l_x \Delta x_0)^2 + (m_x 2\Delta x_{p_x})^2 \right] \right\} \exp\left\{-2j\Pi \frac{l_x m_x}{N_x}\right\} \times \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right) \left[(l_y \Delta y_0)^2 + (m_y 2\Delta y_{p_y})^2 \right] \right\} \exp\left\{-2j\Pi \frac{l_y m_y}{N_y}\right\}] \quad (4.3.7)$$

Si tomamos $f_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$ evaluando a cero en los rangos obtenidos por la ecuación 4.3.6 se puede escribir:

$$\begin{aligned}
f_{l_{p_x, p_y}}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta x_{p_y}) &= A_{p_x} A_{p_y} \Delta x_0 \Delta y_0 \sum_{l_y=N_y}^{N_y-1} \sum_{l_x=N_x}^{N_x-1} [f_{l_{0,0}}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \\
&\times \exp \left\{ j\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) \left[(l_x \Delta x_0)^2 + (m_x \Delta x_{p_x})^2 \right] \right\} \exp \left\{ -2j\pi \frac{l_x m_x}{N_x} \right\} \\
&\times \exp \left\{ j\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) \left[(l_y \Delta y_0)^2 + (m_y \Delta y_{p_y})^2 \right] \right\} \exp \left\{ -2j\pi \frac{l_y m_y}{N_y} \right\}]
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Obteniendo los segundos datos encriptados, se puede hacer un proceso similar, tomando y aplicando la segunda fase aleatoria en una diferente denominada fraccional; se multiplica la señal por la por la segunda fase aleatoria se tiene:

$$F_{2_{0,0}}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) = g_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \exp\{j\phi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)\} \tag{4.3.9}$$

y llevando a cabo la operación de la DFRT de orden q_x en la x-dirección y q_y en la y-dirección. Se obtiene:

$$f_{2_{p_x, p_y}}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta x_{p_y}) = F^{q_x, q_y} \left\{ g_{0,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \exp\{j\phi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)\} \right\} \tag{4.3.10}$$

Una vez capturado la intensidad de la señal $|f_{2_{q_x, q_y}}(m_x \Delta x_{q_x}, m_y \Delta x_{q_x})|^2$.

$f_{2_{q_x, q_y}}(m_x \Delta x_{q_x}, m_y \Delta x_{q_x})$, se tiene definido e identificado de la siguiente manera

$f_{l_{p_x, p_y}}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta x_{p_x})$ usando:

$$f_{2_{q_x, q_y}}(m_x \Delta x_{q_x}, m_y \Delta x_{q_x}) =$$

$$\begin{aligned}
&A_{p_x} A_{p_y} \Delta x_0 \Delta y_0 \sum_{l_y=N_y}^{N_y-1} \sum_{l_x=N_x}^{N_x-1} [f_{l_{0,0}}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \\
&\times \exp \left\{ j\pi \cot \left(\frac{q_x \Pi}{2} \right) \left[(l_x \Delta x_0)^2 + (m_x \Delta x_{q_x})^2 \right] \right\} \exp \left\{ -2j\pi \frac{l_x m_x}{N_x} \right\} \\
&\times \exp \left\{ j\pi \cot \left(\frac{q_y \Pi}{2} \right) \left[(l_y \Delta y_0)^2 + (m_y \Delta y_{q_y})^2 \right] \right\} \exp \left\{ -2j\pi \frac{l_y m_y}{N_y} \right\}]
\end{aligned}$$

$$\tag{4.3.11}$$

4.3.2 Descriptación

Nota que $f_{1,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$ y $f_{2,0}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)$ se tiene en ambos se están evaluando con cero y usando la propiedad de correlación se pueden definir en las siguientes dos funciones:

$$\begin{aligned}
 & \frac{N_y - k_y - 1}{2} \\
 & \frac{N_y - k_x - 1}{2} \\
 RHS1(k_x, k_y) &= \sum_i \dot{i} \\
 & \dot{i} \\
 & = \frac{\left| \sin\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right) \right|}{2N_x \Delta x_0^2} \frac{\left| \sin\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right) \right|}{2N_y \Delta y_0^2} x \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_x \Pi}{2}\right) k_x^2 (\Delta x_0)^2\right\} \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{p_y \Pi}{2}\right) k_y^2 (\Delta y_0)^2\right\} \\
 & \quad x \sum_{m_y=-N_y}^{N_y-1} \sum_{m_x=-N_x}^{N_x-1} |fl_{p_x, p_y}(m_x \Delta x_{p_x}, m_y \Delta x_{p_y})|^2 \exp\left\{j2\Pi \frac{k_x m_x}{N_x}\right\} \exp\left\{j2\Pi \frac{k_y m_y}{N_y}\right\} \\
 & \hspace{15em} (4.3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{N_y - k_y - 1}{2} \\
 & \frac{N_y - k_x - 1}{2} \\
 RHS2(k_x, k_y) &= \sum_i \dot{i} \\
 & \dot{i} \\
 & = \frac{\left| \sin\left(\frac{q_x \Pi}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{q_y \Pi}{2}\right) \right|}{2N_x \Delta x_0^2} \frac{\left| \sin\left(\frac{q_y \Pi}{2}\right) \right|}{2N_y \Delta y_0^2} x \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{q_x \Pi}{2}\right) k_x^2 (\Delta x_0)^2\right\} \exp\left\{j\Pi \cot\left(\frac{q_y \Pi}{2}\right) k_y^2 (\Delta y_0)^2\right\} \\
 & \quad x \sum_{m_y=-N_y}^{N_y-1} \sum_{m_x=-N_x}^{N_x-1} |fl_{q_x, q_y}(m_x \Delta x_{q_x}, m_y \Delta x_{q_y})|^2 \exp\left\{j2\Pi \frac{k_x m_x}{N_x}\right\} \exp\left\{j2\Pi \frac{k_y m_y}{N_y}\right\} \\
 & \hspace{15em} (4.3.13)
 \end{aligned}$$

Nota que:

$$f_{2,0,0}(l_x \Delta x_0) = f_{l_{0,0}}(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \exp\{j\gamma(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0)\}, \quad (4.3.14)$$

donde

$$\gamma(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) = \phi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) - \varphi(l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0). \quad (4.3.15)$$

Introduciendo los variables enteras de h_x y h_y donde

$$h_x = N_x - k_x \Rightarrow k_x = N_x - h_x,$$

$$h_y = N_y - k_y \Rightarrow k_y = N_y - h_y.$$

Se puede escribir la ecuación 4.3.12 y 4.3.13 con esta substitución:

$$RHS1(N_x - h_x, N_y - h_y) =$$

$$\frac{N_y - k_y - 1}{2} \sum_{k_x}^{\frac{N_y - k_x - 1}{2}} i$$

(4.3.16)

y

$$RHS2(N_x - h_x, N_y - h_y) =$$

$$\frac{N_y - k_y - 1}{2} \sum_{k_x}^{\frac{N_y - k_x - 1}{2}} i$$

(4.3.17)

Utilizando la ecuación 4.13.16 y .13.17 , finalmente juntamos los dos tipo de productos

$$f_{l_{0,0}}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) f_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - h_x \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - h_y \right) \Delta y_0 \right],$$

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} + h_x - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} + h_y - 1 \right) \Delta y_0 \right) f_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right],$$

Donde h_x tomando los rangos a evaluar $1 \leq h_x \leq \frac{N_x}{2} + 1$ y similarmente se toma h_y evaluado en

el rango $1 \leq h_y \leq \frac{N_y}{2} + 1$, examinando los casos $(h_x=1, h_y=1)$, $(h_x=1, h_y=2)$, y $(h_x=2, h_y=1)$,

separando y definiendo generalmente la formula de recursividad por otros valores de h_x y h_y .

Examinando la ecuación 4.3.16 y tomando $(h_x=1, h_y=1)$ observamos que:

$$\begin{aligned} fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right], \\ = RHS 1(N_x - 1, N_y - 1) \exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) \left(\frac{N_x}{2} \right) (N_x - 1) (\Delta x_0)^2 \right\} \\ \times \exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) \left(\frac{N_y}{2} \right) (N_y - 1) (\Delta y_0)^2 \right\} \end{aligned}$$

(4.3.18)

Con la ecuación 4.3.16 similarmente evaluamos los resultados:

$$\begin{aligned} fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) f_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right], \\ = RHS 1(N_x - 1, N_y - 1) \exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) \left(\frac{N_x}{2} \right) (N_x - 1) (\Delta x_0)^2 \right\} \\ \times \exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) \left(\frac{N_y}{2} \right) (N_y - 1) (\Delta y_0)^2 \right\} \exp \left\{ j\gamma \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) \right\} \\ \times \exp \left\{ -j\gamma \left(\left(\frac{N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) \right\}, \end{aligned}$$

(4.3.19)

$$a(h_x, h_y) = \exp \left\{ -j\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) N_x (N_x - h_x) (\Delta x_0)^2 \right\} \exp \left\{ -j\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) N_y (N_y - h_y) (\Delta y_0)^2 \right\},$$

(4.3.20)

$$b(h_x, h_y) = \exp \left\{ -j\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) (N_x - 2h_x + 2) (N_x - h_x) (\Delta x_0)^2 \right\}$$

$$x \exp \left\{ -j\Pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) (N_y - 2h_y + 2)(N_y - h_y)(\Delta y_0)^2 \right\},$$

(4.3.21)

$$c(h_x, h_y) = \exp \left\{ -j\Pi \cot \left(\frac{q_x \Pi}{2} \right) N_x (N_x - h_x)(\Delta x_0)^2 \right\} \exp \left\{ -j\Pi \cot \left(\frac{q_y \Pi}{2} \right) N_y (N_y - h_y)(\Delta y_0)^2 \right\},$$

$$x \exp \left\{ -j\mathcal{V} \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) \right\} \exp \left\{ j\mathcal{V} \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) \right\},$$

(4.3.22)

$$d(h_x, h_y) = \exp \left\{ -j\Pi \cot \left(\frac{q_x \Pi}{2} \right) (N_x - 2h_x + 2)(N_x - h_x)(\Delta x_0)^2 \right\} \exp \left\{ -j\Pi \cot \left(\frac{q_y \Pi}{2} \right), \right.$$

$$x(N_x - 2h_x + 2)(N_x - h_x)(\Delta x_0)^2 \left. \right\} \exp \left\{ j\mathcal{V} \left(\left(\frac{-N_x}{2} + h_x - 1 \right) \Delta x_0, \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{-N_y}{2} + h_y - 1 \right) \Delta y_0 \right\} \exp \left\{ j\mathcal{V} \left(\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right) \right\},$$

(4.3.23)

$$D(h_x, h_y) = a(h_x, h_y)d(h_x, h_y) - b(h_x, h_y)c(h_x, h_y).$$

(4.3.24)

Usando las variables ($h_x=2, h_y=1$) en las ecuaciones 4.13.16 y .13.17 obtenemos:

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 2 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right],$$

$$= \frac{RHS 1(N_x - 2, N_y - 1)d(2,1) - RHS 2(N_x - 2, N_y - 1)b(2,1)}{D(2,1)}$$

(4.3.24)

y

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 2 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right],$$

$$= \frac{RHS 2(N_x - 2, N_y - 1)a(2,1) - RHS 1(N_x - 2, N_y - 1)c(2,1)}{D(2,1)}$$

(4.3.25)

Similarmente tomamos $(h_x=1, h_y=2)$ en las ecuaciones 4.13.16 y .13.17 obtenemos:

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 2 \right) \Delta y_0 \right],$$

$$= \frac{RHS 1(N_x - 1, N_y - 2)d(1,2) - RHS 2(N_x - 1, N_y - 2)b(1,2)}{D(1,2)}$$

(4.3.26)

y

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 2 \right) \Delta y_0 \right],$$

$$= \frac{RHS 2(N_x - 1, N_y - 2)a(1,2) - RHS 1(N_x - 1, N_y - 2)c(1,2)}{D(1,2)} \quad (4.3.27)$$

Se puede escribir el conjunto de expresiones para todos los valores restantes evaluados de h_x y

h_y , donde $1 \leq h_x \leq \frac{N_x}{2} + 1$ y $1 \leq h_y \leq \frac{N_y}{2} + 1$

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - h_x \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - h_y \right) \Delta y_0 \right],$$

$$= \frac{T(h_x, h_y)a(h_x, h_y) - S(h_x, h_y)b(h_x, h_y)}{D(h_x, h_y)}$$

(4.3.28)

y

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} + h_x - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} + h_y - 1 \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right],$$

$$= \frac{T(h_x, h_y)d(h_x, h_y) - S(h_x, h_y)b(h_x, h_y)}{D(h_x, h_y)}$$

(4.3.29)

Donde $T(h_x, h_y)$ y $S(h_x, h_y)$ están definidas como:

$$T(h_x, h_y) = RHS 1(N_x - h_x, N_y - h_y)$$

$$= \left(\frac{N_y + h_y - 1}{2} \right) \left(\frac{N_x + h_x - 1}{2} \right)$$

$$- \sum_{n_y = -\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}} \sum_{n_x = -\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}} [fl_{0,0}^i(n_x \Delta x_0, n_y \Delta y_0) fl_{0,0} \left[(n_x + N_x - h_x) \Delta x_0, (n_y + N_y - h_y) \Delta y_0 \right]]$$

$$x \exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) n_x (N_x - h_x) (\Delta x_0)^2 \right\} \exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) n_y (N_y - h_y) (\Delta y_0)^2 \right\} \quad (4.3.29)$$

y

$$\begin{aligned} S(h_x, h_y) &= RHS 2(N_x - h_x, N_y - h_y) \\ &\left(-\frac{N_y + h_y - 1}{2} \right) \left(-\frac{N_x + h_x - 1}{2} \right) \\ &- \sum_{n_y = -\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}} \sum_{n_x = -\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}} [fl_{0,0}^i(n_x \Delta x_0, n_y \Delta y_0) fl_{0,0} [(n_x + N_x - h_x) \Delta x_0, (n_y + N_y - h_y) \Delta y_0] \\ &\exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_x \Pi}{2} \right) n_x (N_x - h_x) (\Delta x_0)^2 \right\} x \exp \left\{ j2\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) n_y (N_y - h_y) (\Delta y_0)^2 \right\} \\ &\exp \left\{ j\gamma (n_x \Delta x_0, n_y \Delta y_0) \right\} x \exp \left\{ j\gamma [(n_x + N_x - h_x) \Delta x_0, (n_y + N_y - h_y) \Delta y_0] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

En la ecuación 4.3.29 y 4.3.30 no se están incluyendo los valores de n_x y n_y

$$(n_x, n_y) = \left(\frac{N_x}{2}, \frac{N_y}{2} \right) \text{ y } (n_x, n_y) = \left(-\frac{N_x}{2} + h_x - 1, \frac{N_y}{2} + h_y - 1 \right) \quad (4.3.31)$$

Notemos que la $fl_{0,0}^i(n_x \Delta x_0, n_y \Delta y_0) fl_{0,0} [(n_x + N_x - h_x) \Delta x_0, (n_y + N_y - h_y) \Delta y_0]$ termino en la ecuación 4.3.29 podemos definirla por la multiplicación proveniente calculada por el termino $fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{-N_x}{2} - h_x \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} - h_y \right) \Delta y_0 \right]$ tomados por la ecuación 4.3.28 y

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} + h_x - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} + h_y - 1 \right) \Delta y_0 \right) f_{0,0} \left[\left(\frac{-N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right]$$

Evaluando por la ecuación 4.3.29 y dividiendo el resultado por la multiplicación

$$fl_{0,0}^i \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) f_{0,0} \left[\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right]$$

fundado por la ecuación 3.3.18.

Cuando alcanzamos $h_{x0} = \left(\frac{N_x}{2} + 1\right)$ y $h_{y0} = \left(\frac{N_y}{2} + 1\right)$ notemos que

$$\begin{aligned} & f_{0,0} \left[\frac{N_x}{2} - (h_{x0} - 1) \Delta x_0, \frac{N_y}{2} - (h_{y0} - 1) \Delta y_0 \right] \\ &= f_{0,0} \left(\left(\frac{N_x}{2} + h_{x0} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} + h_{y0} - 1 \right) \Delta y_0 \right) \end{aligned}$$

(4.3.32)

La expresión de arriba es equivalente a $f_{0,0}(0,0) = f_{0,0}(0,0)$.

Esta ecuación está siendo determinada $f_{0,0}(0,0)$ y completada desde:

$$\begin{aligned} & \left\{ fl_{0,0}^i \left(-\frac{N_x}{2} \Delta x_0, -\frac{N_y}{2} \Delta y_0 \right) fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - (h_{x0} - 1) \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - (h_{y0} - 1) \right) \Delta y_0 \right] fl_{0,0}^i \right. \\ & x \left[\left(-\frac{N_x}{2} + h_{x0} - 1 \right) \Delta x_0, \left(-\frac{N_y}{2} + h_{y0} - 1 \right) \Delta y_0 \right] fl_{0,0} \left[\left(\frac{N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right] \left. \right\} \\ & / \\ & \left\{ RHS 1 (N_x - 1, N_y - 1) \exp \left[j\pi \cot \frac{p_x \Pi}{2} N_x (N_x - h_x) (\Delta x_0)^2 \right] \right. \\ & \left. x \exp \left[j\pi \cot \left(\frac{p_y \Pi}{2} \right) N_y (N_y - h_y) (\Delta y_0)^2 \right] \right\} = |fl_{0,0}(0,0)|^2 \end{aligned}$$

(4.3.33)

Una vez evaluados podemos escoger una fase arbitrariamente y dividiéndolos en la ecuación (4.3.29) y (4.3.29) para los valores apropiados de h_x y h_y , valores determinados por

$$fl_{0,0} \left(\left(\frac{-N_x}{2} \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} \right) \Delta y_0 \right) \text{ y } fl_{0,0} \left[\left(\frac{-N_x}{2} - 1 \right) \Delta x_0, \left(\frac{-N_y}{2} - 1 \right) \Delta y_0 \right].$$

Finalmente, recobremos la señal original, multiplicamos por $\exp \left\{ -j\varphi (l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \right\}$, conjugamos el complejo de la primera ecuación y usamos la llave la fase de la señal de encriptación:

$$g_{0,0} (l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) = fl_{0,0} (l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \exp \left\{ -j\varphi (l_x \Delta x_0, l_y \Delta y_0) \right\}$$

(4.3.35)

4.3.3 Resultados

Se verifica el algoritmo de la encriptación de la Transformada Fraccional de Fourier utilizando imagen de Lena de 64x64, misma que se utiliza en el algoritmo de la transformada de Fourier, para visualizar el comportamiento de la encriptación. El proceso de encriptación es presentada con los siguientes valores: ($p_x=0.5$, $p_y=0.5$) y ($q_x=1.5$, $q_y=1.5$).

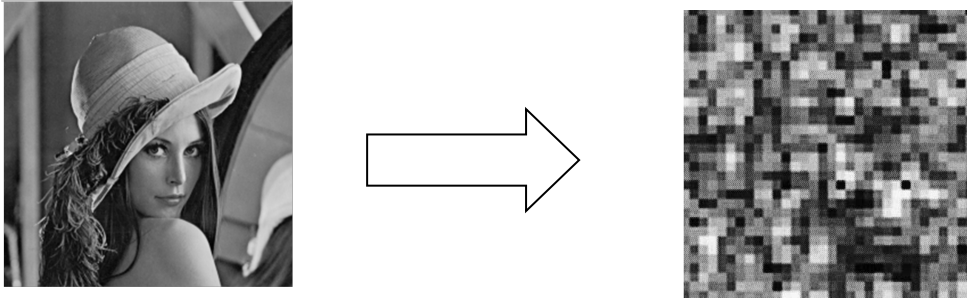


Figura 4.4 Imagen de Lena y su encriptación bajo el método de la Fraccional de Fourier.

Se puede observar en la figura 4.4, que se puede contener la información de dos imágenes, donde la señal de intensidad puede representar una imagen y la fase de la señal puede modularse una representación de una segunda imagen.

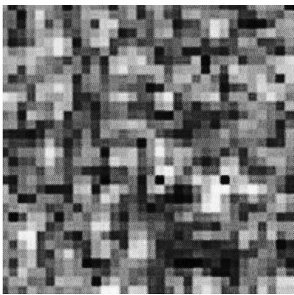
Inversa de la transformada fraccional de Fourier

El proceso de desencriptación es más complejo debido a los márgenes de errores computacionales por tal motivo es necesario cuantificar los datos, durante la desencriptación recursiva loop, verificando los márgenes de errores en los datos procesados para posteriormente evaluar los datos a uno para el desencriptamiento de la imagen.

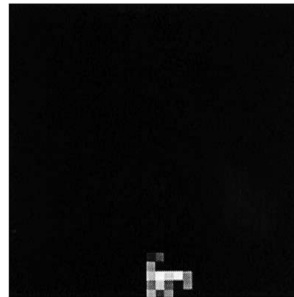
Esta sección es procesada usando el la media del error cuadrado (MSE) la incorrecta encriptación y desencriptación de imágenes digitales.

Este proceso de desencriptación se verificó mediante el programa Mathcad, ya que contiene la accesibilidad de interpretar las ecuaciones matemáticas, y también simplifica el cálculo del MSE, se desglosa la función a calcular y digitalización de la imagen de Lena.

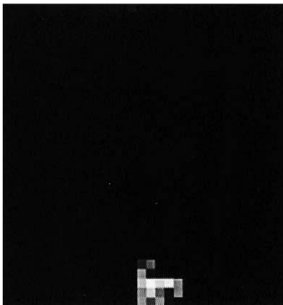
Se observan las distintas fases para realizar el proceso de descriptacion de la imagen de Lena, en la figura 4.5: (a) es la imagen de Lena Encriptada, (b) descriptacion usando un incorrecto valor de px y otro por 1×10^{-5} , (c) descriptacion usando un incorrecto valor de qx y otro por 1×10^{-5} , (d) descriptacion de la imagen usando incorrecto la fase key, (e) descriptacion de la imagen.



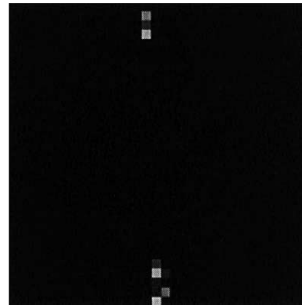
(a) Encriptada



(b) Descriptacion, valor de px



(c) Descriptacion, valor de qx



(d) Descriptacion de la imagen



(e) *Lena*

Figura 4.4 Proceso de descriptacion de la imagen de Lena.

CONCLUSIONES

Se hace un leve análisis referente al procesamiento de imágenes digitales, tomando en cuenta los conceptos básicos del mismo, sus técnicas de procesado de imágenes: convolución, procesado, suavizado, filtros pasa Bajas, filtro de media, filtros pasa altas, detección de borde, eliminado de ruido, filtrado de mediana, filtrado frecuencial, visualización del espectro, filtro ideal.

Encriptación de imagen digital (consiste en enredar un mensaje con una fórmula matemática irremediablemente complicada, volviéndolo ilegible a cualquiera, salvo las personas que tengan la clave secreta para decodificar el mensaje).

Se realiza el análisis matemático para la encriptación de imágenes digitales, en este caso se utiliza la Transformada de Fourier y su Fraccional. Es utilizado el entorno de Mathcad para verificar el comportamiento de las imágenes que van desde una figura geométrica (cuadro, triangulo, semicírculo, círculo) hasta una imagen más compleja (como es el caso de la imagen de Lena).

Es analizado desde una serie simple de Fourier, su Discreta de su trasformada de Fourier, Transformada de Fourier, Inversa de Fourier, propiedades de escalamiento de Fourier, Serie Hermitegauss 2D, Análisis de la transformada Fraccional de Fourier, y su discreta de la transformada Fraccional de Fourier. Mediante el cual se visibiliza las imágenes digitales en el capítulo III.

Con el propósito de poder desarrollar un algoritmo de encriptación de imágenes digitales mediante la opción matemática de la transformada de Fourier y su fraccional.

Se realiza en dos partes, primero se implementa el algoritmo de la transformada de Fourier para encriptar una imagen digital y su inversa de Fourier para desencriptar la misma imagen, dándonos como resultado la comparación que se esperaba visualizar después de haberlo desarrollado bajo un método óptico-digital (mencionado en el capítulo IV en el cual se muestra un esquema de la referencia óptica), mostrando resultados similares por medio del computo.

Posteriormente se desarrolla el algoritmo de la Fraccional de Fourier verificándose los resultados, desarrollado en Mathcad, observando que al utilizar dicho algoritmo la encriptación está definida a un análisis más complejo al de la Transformada de Fourier, la imagen se visualiza mas fraccionada, probando que bajo este método es posible tener más seguridad al momento de encriptar una imagen.

Uno de los propósitos del desarrollo de estos algoritmos es con el fin de comparar en el plano de Fourier de un lente convergente, lo que físicamente equivale a su punto focal, mediante la óptica-digital y un visualizar mediante el cómputo su equivalencia.

Otro es el comparar la diferencia que existe entre una transformada de Fourier y su fraccional, dando como opción las dos técnicas para encriptar y desencriptar una imagen digital. De esa forma se deja abierta la opción de elegir a los programadores cuál de estas dos técnicas es más conveniente utilizar de acuerdo a sus necesidades de requerimiento a futuros proyectos o análisis posteriores.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H.M. Ozaktas, D. Mendlovic, Fractional Fourier transforms and their optical implementation. *II.J.Opt.Soc.Am.A.* **10** 12, 2522-2535 (1993).
- [2] D. Mendlovic H.M. Ozaktas, Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I *J.Opt.Soc.Am.A.* **10** 9, 1875-1881 (1993).
- [3] H, M. Ozaktas, D. Mendlovic, Fourier Transforms of fractional order and their optical interpretation, *Optics Communications* 101 3.4 163-169 (1993).
- [4] <http://es.wikipedia.org/wiki/AES>
- [5] http://es.wikipedia.org/wiki/Criptograf%C3%ADa_de_curva_el%C3%ADptica
- [6] <http://es.wikipedia.org/wiki/Criptograf%C3%ADa>
- [7] <http://webpcmania.blogcindario.com/2006/05/00112-teoria-de-la-complejidad-computacional.html>
- [8] *Revista Colombiana de física*, vol.35, No.2,20003, Z.Lizarazo y Y.Torrez, Grupo de Optica y Tratamiento de Señales, Encriptación de imágenes usando la transformada Fracciona de Fourier.