

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias de la Computación

Que para obtener el título de  
Ingeniero en Ciencias de la Computación

## Herramienta Gráfica Difusa

por

Víctor Serrano Escobar      200602342



Asesor de Tesis: Dr. Pedro García Juárez

Puebla - Puebla  
Julio de 2012

# Herramienta Gráfica Difusa

Víctor Serrano Escobar

July 10, 2012

### **Víctor Serrano Escobar:**

Quiero dedicar esta tesis, que representa el último esfuerzo de mi carrera de Ingeniero en Ciencias de la Computación, a las personas más importantes en mi vida, mi madre y mi padre, porque creyeron en mí y porque me sacaron adelante, dándome ejemplos dignos de superación y entrega, porque en gran parte gracias a ustedes, hoy puedo ver alcanzada mi meta, ya que siempre estuvieron impulsándome en los momentos más difíciles de mi carrera, y porque el orgullo que sienten por mí, fue lo que me hizo ir hasta el final. Va por ustedes, por lo que valen, porque admiro su fortaleza y por lo que han hecho de mí.

A mis hermanos, que con su amor y cariño me han ensañado a salir adelante. Gracias por su paciencia, gracias por preocuparse por su hermano mayor, gracias por compartir sus vidas conmigo, pero sobre todo, gracias por estar en otro momento tan importante en mi vida.

A mis amigos, por pasar a mi lado todos los momentos de mi vida universitaria y estar siempre en las buenas y en las malas, jamás lo olvidaré.

Al Dr. Pedro García Juárez, mi asesor de tesis y más que un asesor ha sido mi amigo, que en los momentos difíciles estuvo ahí para ayudarme. Gracias a la orientación y ayuda que me brindó para la realización de este proyecto que es nuestro y no sólo mío, ya que ambos trabajamos juntos durante estos meses.

Pero en especial, quiero dedicar mi trabajo a mi abuelo Patrocinio Serrano García, porque siempre estuvo en los momentos importantes de mi vida, por ser un ejemplo para salir adelante y por tus consejos que han sido de gran ayuda para mi vida y crecimiento. Esta tesis es el resultado de lo que él me enseñó de la vida, ya que siempre fue una persona honesta, entregada a su trabajo, y un gran líder, pero más que todo eso, una gran persona que siempre pudo salir adelante y fue triunfador. Es por ello que hoy te dedico este trabajo de tesis. Gracias abuelo, nunca te olvidare.

Gracias por haber fomentado en mí el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida.

Mil palabras no bastarían para agradecerles su apoyo, su comprensión y sus consejos en los momentos difíciles.

A todos, espero no defraudarlos y contar siempre con su valioso apoyo, sincero e incondicional.

# Tabla de Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Teoría de Conjuntos Difusos</b>	<b>16</b>
2.1	Introducción . . . . .	16
2.2	Conjuntos Difusos . . . . .	17
2.2.1	Funciones de Membresía . . . . .	20
2.2.1.1	Función de membresía Lineal . . . . .	21
2.2.1.2	Función de membresía Triangular . . . . .	21
2.2.1.3	Función de membresía Trapezoidal . . . . .	23
2.2.1.4	Función de membresía Gaussiana . . . . .	25
2.2.1.5	Función de membresía S . . . . .	25
2.2.1.6	Función de membresía Gamma . . . . .	27
2.2.1.7	Función de membresía Lambda o L . . . . .	28
2.2.1.8	Función de membresía Z . . . . .	29

2.2.2	Definiciones Básicas . . . . .	32
2.3	Operaciones Básicas entre Conjuntos Difusos . . . . .	40
2.4	Propiedades de los Conjuntos Difusos . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Números Difusos</b>	<b>61</b>
3.1	Introducción . . . . .	61
3.2	Números difusos . . . . .	62
3.3	$\alpha - corte$ . . . . .	64
3.3.1	Propiedades de los $\alpha - cortes$ . . . . .	64
3.3.2	Representación de Conjuntos Difusos mediante $\alpha - corte$ . . . . .	67
3.4	Operaciones Aritméticas sobre Intervalos Cerrados . . . . .	69
3.4.1	Propiedades Aritméticas . . . . .	71
3.5	Operaciones Aritméticas en Números Difusos . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Diseño e Implementación</b>	<b>77</b>
4.1	Introducción . . . . .	77
4.2	Diseño General del Sistema . . . . .	78
4.2.1	Módulo I. Elegir Función de Membresía. . . . .	81
4.2.2	Módulo II. Ingresar Datos de Función de Membresía. . . . .	82
4.2.3	Módulo III. Seleccionar Operación Aritmética. . . . .	84

<b>5 Pruebas y Resultados</b>	<b>86</b>
5.1 Introducción . . . . .	86
5.2 Pruebas . . . . .	86
5.3 Resultados . . . . .	96
<b>6 Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>100</b>
6.1 Introducción . . . . .	100
6.2 Conclusiones . . . . .	100
6.3 Trabajos Futuros . . . . .	102
<b>A Implementación de las Funciones de Membresía en Sistema</b>	<b>103</b>
A.1 Funciones de membresía . . . . .	103
A.1.1 Suma . . . . .	107
A.1.2 Resta . . . . .	108
A.1.3 Producto . . . . .	108
A.1.4 División . . . . .	109
<b>B Instalación y Configuración de Herramienta Difusa</b>	<b>110</b>
B.1 Introducción . . . . .	110
B.2 Instalar la Herramienta Gráfica Difusa . . . . .	111

# Listado de Tablas

2.1	Rango de estaturas de un conjunto de personas. . . . .	20
-----	--	----

# Listado de Figuras

2.1	Representación difusa. . . . .	19
2.2	Representación clásica . . . . .	19
2.3	Función de membresía Lineal ( $MA$ ). . . . .	22
2.4	Función de membresía Triangular. . . . .	23
2.5	Función de membresía Trapezoidal ( $A$ ). . . . .	24
2.6	Función de membresía Gaussiana. . . . .	25
2.7	Función de membresía S. . . . .	26
2.8	Función de membresía Gamma. . . . .	28
2.9	Función de membresía Variación Gamma. . . . .	28
2.10	Función de membresía Lambda. . . . .	29
2.11	Función de membresía Z. . . . .	30
2.12	Funciones de membresía para la regulación de la temperatura. . . . .	32
2.13	Conjuntos de difusos 2.16 y 2.17. . . . .	33
2.14	Subconjunto difuso. . . . .	35

2.15	Punto de Cruce. . . . .	35
2.16	Soporte de Conjunto Difuso. . . . .	36
2.17	Convexidad en conjuntos difusos. . . . .	38
2.18	Núcleo de conjuntos difusos. . . . .	39
2.19	Peso o altura de conjuntos difusos. . . . .	40
2.20	Conjunto unitario o singleton. . . . .	41
2.21	Función de membresía trapezoidal y su complemento estándar. . . . .	41
2.22	Función de membresía trapezoidal y su intersección estándar. . . . .	42
2.23	Unión estándar entre conjuntos difusos. . . . .	43
3.1	Función de membresía variación Gamma, no representa Número Difuso. . .	64
3.2	Función de membresía variación Gamma, con restricción para representar Número Difuso. . . . .	64
4.1	Diagrama General del Sistema. . . . .	79
4.2	Diagrama de Bloques del sistema. . . . .	80
4.3	Pantalla del Sistema. . . . .	81
4.4	Módulo Funciones Membresía. . . . .	81
4.5	Menú de Funciones Membresía. . . . .	82
4.6	Módulo Ingresar Datos de Función de Membresía. . . . .	83
4.7	Ingresar Datos de Funciones de Membresía A y B. . . . .	83

4.8	Módulo Seleccionar Operación Aritmética. . . . .	84
4.9	Seleccionar Operación Aritmética. . . . .	85
5.1	Interfaz Gráfica de Herramienta Difusa. . . . .	87
5.2	Selecciona Función de Membresía A. . . . .	88
5.3	Mensaje Error si falta al menos uno o los tres datos solicitados. . . . .	88
5.4	Mensaje Error si no cumple con las condiciones iniciales. . . . .	89
5.5	Mensaje Error si exporta sin haber pintado satisfactoriamente la figura A. . . . .	89
5.6	Ingresar Datos y Pintar Función de Membresía A. . . . .	90
5.7	Exportar Función de Membresía A. . . . .	90
5.8	Selecciona Función de Membresía B. . . . .	91
5.9	Ingresar Datos y Pintar Función de Membresía B. . . . .	91
5.10	Ingreso $\alpha - corte = 0.5$ . . . . .	92
5.11	Mensaje de error $\alpha - corte$ no cumple condición inicial. . . . .	92
5.12	Suma de la Figura A más Figura B, con $\alpha - corte = 0.5$ . . . . .	93
5.13	Resta de la Figura A menos Figura B, con $\alpha - corte = 0.5$ . . . . .	94
5.14	Producto de la Figura A y Figura B, con $\alpha - corte = 0.5$ . . . . .	94
5.15	División de la Figura A entre Figura B, con $\alpha - corte = 0.5$ . . . . .	95
5.16	Mensaje de error, si hace click en algún botón de las operaciones aritméticas sin haber generado la Figura B satisfactoriamente. . . . .	95

5.17	Resultado de la suma. . . . .	96
5.18	Resultado de la suma en bibliografía [7]. . . . .	96
5.19	Resultado de la resta. . . . .	97
5.20	Resultado de la resta en bibliografía [7]. . . . .	97
5.21	Resultado del producto. . . . .	98
5.22	Resultado del producto en bibliografía [7]. . . . .	98
5.23	Resultado de la división. . . . .	99
5.24	Resultado de la división en bibliografía [7]. . . . .	99
B.1	Diagrama General del Sistema. . . . .	111
B.2	El instalador está ahora descomprimiendo los archivos de instalación. . . . .	112
B.3	Elección de idioma. . . . .	112
B.4	Instalación de requerimientos. . . . .	113
B.5	Instalación de Herramienta Gráfica Difusa. . . . .	114
B.6	Datos sobre usuario que utilizará la Herramienta Gráfica Difusa. . . . .	114
B.7	Folder de instalación de la Herramienta Gráfica Difusa. . . . .	115
B.8	Listo para instalar la Herramienta Gráfica Difusa. . . . .	115
B.9	Instalación de la Herramienta Gráfica Difusa. . . . .	116
B.10	Proceso de instalación finalizado con éxito. . . . .	116
B.11	Archivo ejecutable de la Herramienta Gráfica Difusa. . . . .	117

B.12 Pantalla principal de la Herramienta Gráfica Difusa. . . . . 117

# Capítulo 1

## Introducción

Cuando se oye hablar por primera vez de la “Lógica Difusa” o, incluso, para quienes han oído hablar algo sobre este tema, pero son desconocedores en la materia, se produce una inmediata tentación de hacer una pequeña gracia a costa de su propio nombre: debe ser algo “poco claro”, quizás “nada elaborado”; “muy difuso”, en definitiva. Estos son el tipo de comentarios que suelen hacerse. Sin embargo, la aparente contradicción interna de su propio nombre no ha sido un inconveniente para su desarrollo teórico y aplicación en diferentes áreas del conocimiento. Y es que, como dice su creador, el profesor Lofti A. Zadeh, “There is nothing fuzzy in fuzzy logic”.

La teoría de conjuntos difusos, conocida también como lógica difusa, es considerada como una generalización de la teoría clásica de conjuntos que permite que elementos de un universo tenga grados intermedios de pertenencia a un conjunto, por medio de una función. Con esta idea se modifica el concepto de bivalencia (0's y 1's) de la lógica clásica, la cual pasa a ser un caso particular de los conjuntos difusos.

Los orígenes de la lógica difusa vienen desde los esfuerzos de Aristóteles y de los filósofos griegos, por buscar metodologías semejantes a la toma de decisiones de los humanos. En sus esfuerzos por derivar una nueva teoría, desarrollaron las llamadas “Leyes del pensamiento”. Una de estas leyes, la “Ley del medio excluyente” propone que toda proposición debe ser o verdadera o falsa. Sin embargo, quien propuso la primera versión de esta ley fue Parménides (alrededor de 400 años A.C.) pero existieron fuertes objeciones,

como las propuestas por Heráclito, que afirmaba que las cosas podrían ser simultáneamente verdad o no verdad [9].

Por otro lado Platón argumentaba que había una tercera región más allá de lo verdadero y falso, donde estos extremos se unían. Otros filósofos como Bertrand Russell y Jan Lukasiewicz, ante las paradojas encontradas en la lógica tradicional, comenzaron a hablar de lógicas multivaluadas. Por ejemplo, la idea de que cualquier afirmación lógica debe ser cierta o falsa, y ninguna otra respuesta, podía producir paradojas como la planteada por Russell, que dice: “El conjunto de todos los conjuntos no miembros de sí mismos es un miembro de sí mismo”, esta expresión si es cierta, entonces sería falso; si es falsa, entonces sería verdadera, y a pesar del intento de obviarlas introduciendo los “axiomas de la teoría de conjuntos” para generar fórmulas “bien definidas”, choca con la evidencia de que en la vida cotidiana son admisibles grados de verdad. Paradojas como la mencionada sólo podían ser resueltas en el contexto de la lógica multivaluada[9]. Otro personaje importante fue, Lukasiewicz quien por primera vez propuso una alternativa sistemática a la lógica bivalente de Aristóteles (Durante la década de 1900, Lukasiewicz describió una lógica de tres valores junto con la matemática que la describía). El tercer valor que él propuso tomaba el significado de “posible” asignándole un valor intermedio entre el verdadero y el falso. Más tarde, Lukasiewicz exploró lógicas de cuatro valores y declaró que, en principio, no había nada que previniese la derivación de una lógica de valores infinitos. Lukasiewicz sintió que la lógica de tres valores y de infinitos valores eran las más interesantes, pero finalmente decidió quedarse con la de cuatro valores, ya que era más fácil de adaptarse a la lógica de Aristóteles. Finalmente Max Black fue uno de los predecesores más importantes antes del surgimiento formal de la lógica difusa. Max Black, publicó en un trabajo: “Vagueness: An exercise in logical analysis in the Philosophical Society.” En éste, Black intentó observar y tratar “lo vago” e introdujo la noción de conjuntos vagos, la cual corresponde a grandes líneas a los conjuntos difusos. Los explicó mediante una curva de pertenencia, declarando que buscaba una lógica más parecida a la utilizada por los humanos.

Posteriormente, en 1965 Lofti A. Zadeh publicó un trabajo en el cual se describían las matemáticas de la teoría de conjuntos difusos y por defecto de la lógica difusa [1]. Esta teoría propuso la creación de una función de membresía en la cual los valores extremos estarían representados por los valores verdadero y falso, operando en un rango de números reales entre 0 y 1. Zadeh distingue entre términos vago y difuso. Por ejemplo que “Juan regresará en unos pocos minutos” sería difuso, es decir, impreciso, pero informativo, mien-

tras que “Juan regresará alguna vez” sería vago, es decir, ambiguo, no informativo. En el primer caso hay información que puede servir de soporte para una decisión y en el segundo no. [3]

Por naturaleza en el lenguaje humano se describen objetos o situaciones en términos imprecisos: grande, joven, tímido, etc. El razonamiento basado en estos términos no puede ser exacto, ya que normalmente representan imprecisiones subjetivas, quizá probables pero no exactas. La Teoría de Conjuntos Difusos es más adecuada que la lógica clásica, para representar fenómenos y observaciones que tengan más de dos estados lógicos. Por ejemplo, la temperatura es alta y la presión normal; es una frase llena de imprecisión pero sin incertidumbre, como lo expresa Zadeh en: “Contrary to the expectations, most of the successful applications of fuzzy logic at the juncture relate to control and systems analysis in which there is imprecision but no uncertainty” [4].

La teoría de lógica difusa ha generado en los últimos años, la segunda generación de modelos de representación del conocimiento, mejor conocidos como sistemas expertos difusos. Esta teoría a revolucionado el mercado electrodoméstico al incorporar de forma sencilla conocimiento humano experto en sistemas de control con características no-lineales, mediante el diseño de los sistemas difusos. Áreas de aplicación incluyen, pero no se limitan a: comunicaciones entre hombre-máquina, medicina, robótica, análisis de señales e imágenes, sistemas de control, electrodomésticos y computadoras.

Las primeras aplicaciones de la teoría difusa se dieron en 1980 y fueron industriales principalmente, tales como el control de procesos en cementeras. Luego, en 1985 Bell Laboratorios desarrolló el primer chip de lógica difusa, de ahí gran cantidad de productos. Más tarde en 1987, se puso en servicio en Japón, el primer metro controlado mediante lógica difusa, haciendo mucho más confortables los viajes en metro, gracias a las suaves frenadas y aceleraciones. Las grandes multinacionales de la industria automotriz, de los electrodomésticos y la óptica la están aprovechando el desarrollo de esta teoría tras constatar sus espectaculares beneficios.

Otro concepto dentro de la lógica difusa, son los números difusos que se utilizan para modelar expresiones que involucran parámetros numéricos. Desde que Zadeh introdujo el concepto de números difusos muchos autores se han dedicado al estudio de éstos desde el aspecto teórico y sus aplicaciones. Dubois y H. Prade en [5] presentan las propiedades de

las operaciones aritméticas con números difusos. Las operaciones aritméticas con números difusos tienen diversas aplicaciones. Por ejemplo, Schulz y Huwe ([13], [14]), lo utilizaron para modelar la incertidumbre y el análisis de sensibilidad de los modelos de transporte de agua en un perfil de suelo en capas, sujeta a las condiciones de contorno impreciso y las propiedades hidráulicas. También Nashaat M. Hussien y Angel Barriga, en su trabajo relacionado con el contraste de imágenes utilizan las operaciones aritméticas difusas para modificar el contraste de imágenes [15]. Una de las ventajas que presenta la aritmética difusa es la gran cantidad de variables de entrada que puede recibir.

Debido a lo anterior, en este trabajo se decidió realizar un sistema en el cual se pueda visualizar de manera gráfica el comportamiento de los números difusos al ser operados aritméticamente. Aunque el sistema fue desarrollado con fines ilustrativos, podría ser aplicable para resolver algún problema inherente de la aritmética difusa.

A continuación se presenta de manera general el contenido del presente trabajo. En el capítulo 2 se hace una presentación de los conceptos de la teoría de conjuntos difusos. Se presenta la fundamentación axiomática básica de la matemática difusa y una definición formal de las funciones de membresía y sus propiedades. También se exponen las operaciones básicas con conjuntos difusos, tales como complemento, unión e intersección. Con base en lo anterior en el capítulo 3, se introduce el concepto de número difuso, la construcción de estos mediante sus  $\alpha$  - *cortes*, operaciones aritméticas y sus propiedades, así como las operaciones aritméticas con números difusos. En el capítulo 4 se presenta la implementación y diseño del sistema desarrollado. En el capítulo 5 se muestran las pruebas efectuadas por la Herramienta Gráfica Difusa. De forma interna y externa se presentan las pruebas mediante algunas figuras que describen el funcionamiento de dicho sistema. Y por último se presentan las conclusiones de este trabajo en el capítulo 6.

# Capítulo 2

## Teoría de Conjuntos Difusos

### 2.1 Introducción

Zadeh en 1965 definió el concepto de conjunto difuso como: “Una clase de objetos con continuos grados de pertenencia, caracterizado por una función que asigna a cada objeto un valor entre cero y uno[1].”

La teoría de conjuntos difusos, conocida también como Lógica Difusa, es una lógica aplicada a conceptos que pueden tomar un valor determinado de veracidad entre la verdad absoluta o la falsedad absoluta, por tal razón es considerada como una lógica multivaluada [8]. Este tipo de lógica se ha convertido en una técnica utilizada en distintas áreas del conocimiento como: la medicina, la matemática, la electrónica y así también en las ciencias computacionales, entre otras.

La idea de Zadeh consistió en dar valores de pertenencia a elementos de un conjunto en el intervalo  $[0,1]$ , en lugar de limitarse a uno de los valores 0 ó 1 (o lo que es lo mismo Falso ó Verdadero) tal y como sucede en la teoría clásica de conjuntos, mediante una función característica. Esta función puede generalizarse de forma que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en el intervalo  $[0,1]$ , para indicar con ello el grado de pertenencia de dichos elementos al conjunto en cuestión. La función que generaliza a la función característica se llama “función de membresía”, parte fundamental de la “Teoría

de Conjuntos Difusos”.

En este capítulo se verán algunos conceptos fundamentales que ayudan a la construcción de la Teoría de Conjuntos Difusos, tales como la definición de Conjunto Difuso, Funciones de membresía, Operaciones básicas y propiedades de tales conjuntos.

## 2.2 Conjuntos Difusos

La noción de los conjuntos difusos proporciona un punto de partida para la construcción y desarrollo de una nueva teoría, como en el caso de conjuntos clásicos, pero más general que esta última y que potencialmente puede llegar a tener más aplicaciones.

En los conjuntos clásicos existe una línea frontera que separa claramente a los elementos de aquellos que no forman parte del conjunto. En el siguiente ejemplo se muestra lo antes mencionado.

**Ejemplo. 2.2.1** *Sea  $U$  es el conjunto de todos los números reales, y  $p(x) = x > 100$ , la propiedad para determinar un conjunto en el sentido clásico, si  $A = \{x : p(x)\}$ , es decir,  $A = (100, \infty)$ .*

Es claro que los números menores a 100 no pertenecen al conjunto  $A$ , esta línea divisoria está determinada por la propiedad  $p(x)$ . Sin embargo, si dicha propiedad no es clara, será difícil definir los elementos que pertenecen o no pertenecen al conjunto, es por esta razón que la teoría de conjuntos difusos toma mayor relevancia debido a que en los conjuntos difusos dicha frontera no es tan marcada como lo veremos en la siguiente definición.

**Definición. 2.2.1** *(Conjuntos Difusos)[1]. Sea  $U$  un conjunto universal clásico, un conjunto difuso  $A$  sobre  $U$  es un conjunto de pares ordenados*

$$A = \{(x, \varphi_A(x)) | x \in U\}, \quad (2.1)$$

donde  $\varphi_A(x) : U \rightarrow [0, 1]$  es una función, llamada función de membresía, la cual mide el grado de pertenencia de los elementos al conjunto.

A continuación se darán algunos ejemplos de conjuntos difusos.

**Ejemplo. 2.2.2** *Un agente de bienes raíces quiere clasificar las casas que ofrece a sus clientes. Un indicador, de la comodidad de las casas, es el número de dormitorios de éstas. Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  el conjunto que describe el tipo de casas disponibles por el número de habitaciones, es decir,  $x$  es el número de habitaciones de la casa y el conjunto difuso “tipo confortable para una familia de 4 personas” está descrito por*

$$A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3), (7, 0), (8, 0), (9, 0), (10, 0)\}$$

En este conjunto de pares ordenados, las primeras componentes son los elementos de  $X$  y las segundas componentes indican el grado de funcionalidad para una familia de cuatro personas, obviamente el grado de funcionalidad depende de las necesidades de la familia la cual podría variar en otra de cuatro elementos y modelarse por medio de una función de membresía.

Otro ejemplo clásico dentro de la lógica difusa es el siguiente.

**Ejemplo. 2.2.3** *Sea  $U$  el Universo de discurso, formado por los posibles valores de la altura que tenga un persona adulta, las unidades de medida empleadas para este ejemplo serán los centímetros (cm). Si consideramos que la altura de una persona adulta está entre 130cm y 210cm,  $U$  sería el intervalo cerrado  $[130, 210]$ . Para la construcción de conjuntos difusos en  $U$  trabajaremos con etiquetas lingüísticas similares a las que se usan de manera coloquial en la vida diaria. Por ejemplo, una persona es Muy Baja, Baja, Mediana, Alta y MuyAlta.*

*Para cada una de las etiquetas lingüísticas anteriores, definamos los conjuntos difusos  $MB, B, M, A$  y  $MA$  respectivamente, de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}
MB &= \{(x, \varphi_{MB}(x)) | x \in [130, 210]\}, \\
B &= \{(x, \varphi_B(x)) | x \in [130, 210]\}, \\
M &= \{(x, \varphi_M(x)) | x \in [130, 210]\}, \\
A &= \{(x, \varphi_A(x)) | x \in [130, 210]\}, \\
MA &= \{(x, \varphi_{MA}(x)) | x \in [130, 210]\},
\end{aligned}$$

donde cada una de las funciones  $\varphi_{MB}(x), \varphi_B(x), \varphi_M(x), \varphi_A(x)$  y  $\varphi_{MA}(x)$  mapean el Universo  $U$  al intervalo  $[0, 1]$ , bajo ciertas condiciones.

Como el Universo  $U$  posee un número infinito de valores, entonces cada conjunto difuso está formado por un número infinito de pares ordenados los cuales se pueden representar mediante gráficas de las funciones  $\varphi_{MB}(x), \varphi_B(x), \varphi_M(x), \varphi_A(x)$  y  $\varphi_{MA}(x)$  (ver figura 2.1). Mientras que la representación gráfica de estos conjuntos en su forma clásica se puede visualizar en la figura 2.2, tomando como referencia la tabla 2.1.

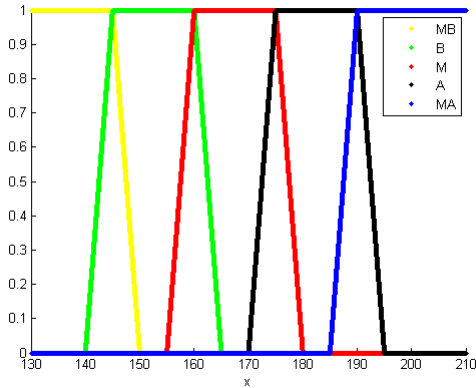


Figura 2.1: Representación difusa.

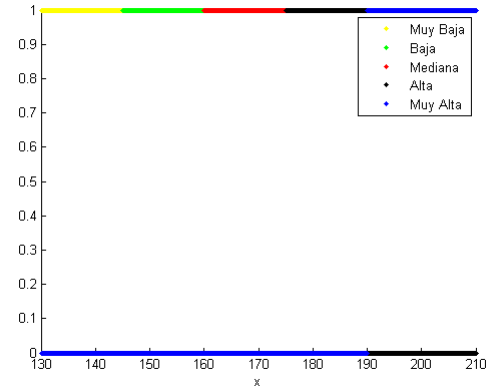


Figura 2.2: Representación clásica .

A continuación se verá el concepto de funciones de membresía y las más usuales en la literatura.

ETIQUETA	RANGO
Muy Baja	[130cm,145cm]
Baja	[145cm,160cm]
Mediana	[160cm,175cm]
Alta	[175cm,190cm]
Muy Alta	[190cm,210cm]

Tabla 2.1: Rango de estaturas de un conjunto de personas.

### 2.2.1 Funciones de Membresía

. En la teoría clásica de conjuntos la pertenencia o no pertenencia de un elemento  $x$  del Universo  $U$ , a un conjunto  $A$ , se describe mediante una función característica  $\mu_A(x)$ , definida de la siguiente manera

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A, \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases} \quad (2.2)$$

Esta función hace un mapeo de todo el universo  $U$  al conjunto  $\{0, 1\}$ , es decir, sólo toma dos valores, como se describe en la ecuación 2.2. Las funciones de membresía son extensiones de las funciones características como se verá en la siguiente definición:

**Definición. 2.2.2** (*Función de membresía*) Sea  $U$  un conjunto clásico, una función  $\mu(x)$  se llama función de membresía si y sólo si  $\mu$  mapea a todos los elementos de  $U$  al intervalo  $[0, 1]$ , es decir,

$$\mu : U \longrightarrow [0, 1]. \quad (2.3)$$

Observe que las funciones de membresía son una extensión de las funciones características, debido que estas últimas sólo toman valores en los extremos del intervalo  $[0, 1]$ , mientras que una función de membresía admite valores intermedios en el mismo intervalo.

Sin embargo, tales funciones quedarán determinadas dependiendo de lo que se quiera representar. Las más comunes son: Las funciones de tipo Lineal, Triangular, Trapezoidal, Gamma, Lambda, S, Z y Gaussiana. A continuación se detallarán las características de cada una de ellas.

### 2.2.1.1 Función de membresía Lineal

Para definir una función de membresía lineal se requieren dos parámetros. Sean  $a, b$  dos números reales tales que  $a < b$ . La ecuación que representa a dicha función es

$$\mu_A(x, a, b) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & b < x. \end{cases} \quad (2.4)$$

Donde  $a$  es el límite inferior y  $b$  el límite superior. Observe que todos los números mayores que  $a$ , tiene valores significativos, es decir distintos de 0. Dichas funciones son utilizadas regularmente para modelar problemas con valores extremos superiores.

Recordemos que en el ejemplo 2.2.3 se definieron conjuntos difusos que hacen referencia a las estaturas de las personas. El conjunto difuso que hace referencia a un valor extremo es  $MA$  cuya función de membresía que se utiliza para la representación gráfica de este conjunto es una función de mebresía lineal con  $a = 185$  y  $b = 190$ , que podemos visualizar en la figura 2.3.

### 2.2.1.2 Función de membresía Triangular

Las funciones de membresía triangulares se especifican mediante tres parámetros. Sean  $a, b$  y  $c$  tres números reales tales que  $a < b < c$ . La ecuación que describe a la función de membresía triangular es

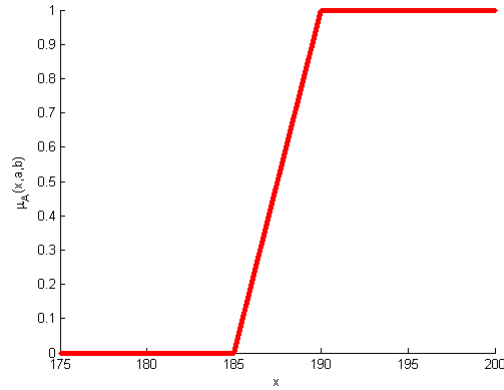


Figura 2.3: Función de membresía Lineal ( $MA$ ).

$$\Delta(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b, \\ \frac{c-x}{c-b} & b < x < c, \\ 0 & c \leq x. \end{cases} \quad (2.5)$$

Otra forma de poder representar a este tipo de funciones, es la siguiente

$$\Delta(x, a, b, c) = \text{máx} \left\{ \text{mín} \left\{ \frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{c-x}{c-b} \right\}, 0 \right\}. \quad (2.6)$$

Donde  $a$  es el límite inferior izquierdo,  $b$  el límite superior o modal y  $c$  es el límite inferior derecho. Observe que todos los números entre  $a$  y  $b$  tiene valores significativos crecientes y los números entre  $b$  y  $c$  valores decrecientes.

Retomando algunos datos del ejemplo 2.2.3,  $U = [130, 210]$  el rango considerado para las personas adultas. Supongamos que se quiere saber las estaturas que se encuentran cerca de  $170\text{cm}$ , este problema se puede modelar con funciones triangulares. Por ejemplo si asignamos  $a = 160$ ,  $b = 170$  y  $c = 180$ , se tendría gráficamente la siguiente representación.

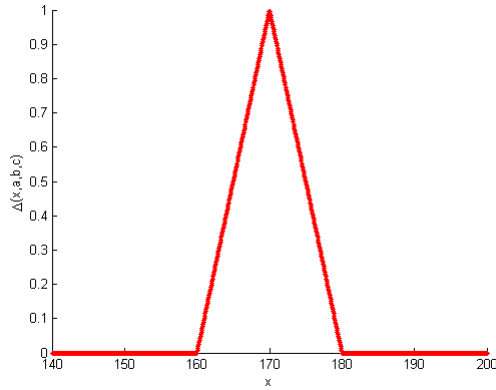


Figura 2.4: Función de membresía Triangular.

Este tipo de funciones usualmente se utiliza para modelar problemas de cercanía a un valor específico. En la literatura se asocian dichas funciones a problemas con valores intermedios, sin embargo desde mi punto de vista las funciones más adecuadas para modelar problemas de valores intermedios son las trapezoidales, que se verá a continuación.

### 2.2.1.3 Función de membresía Trapezoidal

Para la construcción de una función de membresía trapezoidal necesitamos especificar cuatro parámetros. Sean  $a, b, c$  y  $d$  números reales tales que  $a < b < c < d$ . La ecuación siguiente describe las funciones de membresía trapezoidales

$$\mu_A(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b, \\ 1 & b < x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c} & c < x \leq d, \\ 0 & d < x. \end{cases} \quad (2.7)$$

Al igual que las funciones de membresía triangulares que cuentan con dos representaciones, las trapezoidales también la tienen y es la siguiente

$$\mu_A(x, a, b, c, d) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{x - a}{b - a}, 1, \frac{d - x}{d - c} \right\}, 0 \right\}. \quad (2.8)$$

Al parámetro  $a$  se le llama límite inferior izquierdo,  $b$  el límite superior izquierdo,  $c$  el límite superior derecho y  $d$  el límite inferior derecho. Observe que, los valores entre  $b$  y  $c$  su grado de pertenencia será de 1. Mientras tanto, entre  $a$  y  $b$  los grados de pertenencia serán linealmente crecientes y entre  $c$  y  $d$  grados de pertenencia linealmente decrecientes. De aquí que este tipo de funciones modelan problemas de valores intermedios, como: “joven”, “mediana estura”, “templado”, entre otras.

Considerando nuevamente el ejemplo 2.2.3, los conjuntos difusos que hacen referencia a valores intermedios son  $B$ ,  $M$  y  $A$ , de manera particular el conjunto  $A$  utiliza una función de membresía trapezoidal con  $a = 170$ ,  $b = 175$ ,  $c = 190$  y  $d = 195$  y su gráfica se puede apreciar en la figura 2.5.

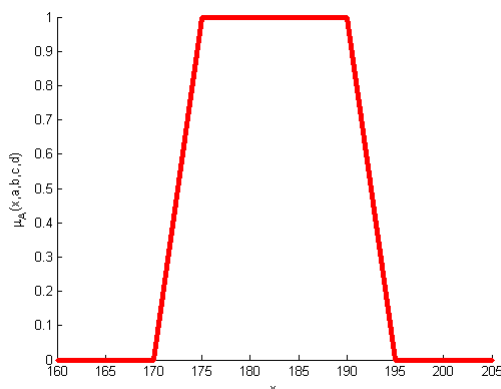


Figura 2.5: Función de membresía Trapezoidal ( $A$ ).

Recuerde que las funciones de membresía triangulares al igual que las trapezoidales son utilizadas para representar valores intermedios, su principal diferencia entre estas dos funciones reside en que las funciones de membresía trapezoidal tienen un margen de tolerancia alrededor de un cierto valor, mientras que las triangulares son más cerradas en ese aspecto.

#### 2.2.1.4 Función de membresía Gaussiana

Las funciones de membresía gaussianas son utilizadas frecuentemente en temas relacionados con la estadística y para su construcción se necesitan dos parámetros. Sean  $m$  y  $k$  dos números reales, tales que  $k > 0$ . La ecuación esta dada por

$$\pi(x, m, k) = e^{-\left(\frac{x-m}{k}\right)^2}. \quad (2.9)$$

Donde  $m$  es el punto medio de la función y  $k$  determina la amplitud de la misma, cuanto mayor sea este parámetro más estrecha es la gráfica.

La figura 2.6 representa la gráfica de una función de membresía gaussiana asociada a un conjunto difuso formado por esturas alrededor de  $160\text{cm}$  y una desviación estándar de  $7.5\text{cm}$ , donde  $m = 160$  y  $k = 7.5$ .

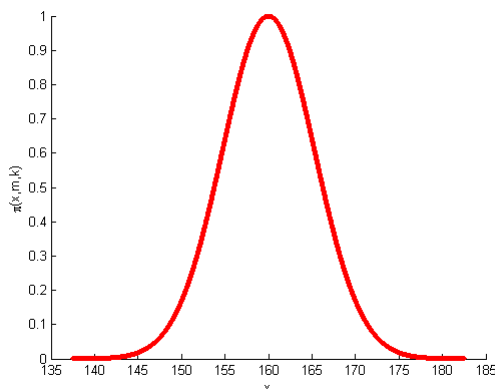


Figura 2.6: Función de membresía Gaussiana.

#### 2.2.1.5 Función de membresía S

Para la construcción de una función de membresía S se requieren dos parámetros. Los cuales son  $a$  y  $b$  números reales tales que  $a < b$ . La ecuación que representa a este tipo de funciones es

$$S(x, a, b) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 1 & b \leq x. \end{cases} \quad (2.10)$$

Donde  $a$  es el límite inferior,  $b$  el límite superior. Observe que, para los valores menores que  $a$  su grado de pertenencia será 0 y 1 para los valores mayores de  $b$ .

Este tipo de funciones se utiliza para problemas que muestran una progresión temporal desde niveles bajos hasta llegar a un punto máximo en un cierto período de tiempo. Las funciones de membresía  $S$  son casos particulares de funciones logísticas, las cuales son utilizadas para modelos de crecimiento poblacional, propagación de enfermedades epidémicas así como difusión en redes sociales [11].

La figura 2.7 representa la gráfica de una función de membresía  $S$ , con  $a = 170$  y  $b = 190$ .

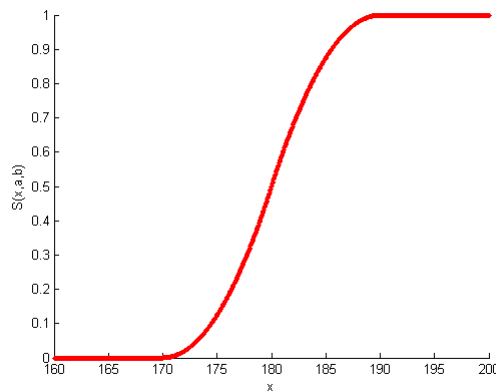


Figura 2.7: Función de membresía  $S$ .

### 2.2.1.6 Función de membresía Gamma

Para definir las funciones de membresía Gamma necesitamos especificar dos parámetros. Sean  $a$  y  $k$  dos números reales, tales que  $k > 0$ . Las ecuaciones que describen a este tipo de funciones son

$$\gamma(x, a, k) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ 1 - e^{-k(x-a)^2} & a < x. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\gamma(x, a, k) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & a < x. \end{cases} \quad (2.12)$$

Definida por su límite inferior  $a$  y el valor  $k$ , que es el espectro que abre o cierra más la gráfica de la función.

Las funciones de tipo Gamma, se caracterizan por un rápido crecimiento a partir de  $a$  dependiendo del valor de  $k$ , es decir, conforme el valor de  $k$  aumenta, el crecimiento de la función aumenta. Este tipo de funciones aparecen frecuentemente tanto en la probabilidad y estadística.

La figura 2.8 se muestran las gráficas asociadas a las funciones 2.11 y 2.12, con  $a = 5$  y  $k = 0.1$ .

Algunos autores presentan una variación de la función gamma para poder alcanzar el valor de 1. La ecuación a la que hacen referencia para su representación está dada por

$$\gamma(x, a, m) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{x-a}{m-a} & a < x < m, \\ 1 & m \leq x. \end{cases} \quad (2.13)$$

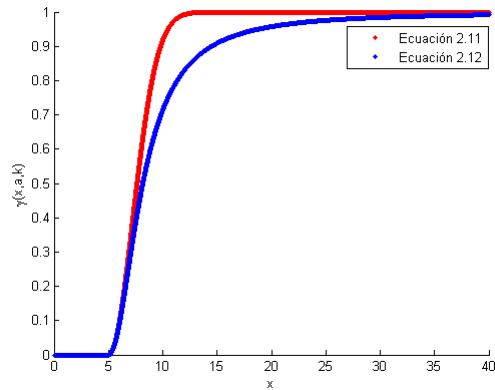


Figura 2.8: Función de membresía Gamma.

Donde  $a$  es el límite inferior y  $m$  es el valor modal. La gráfica asociada a esta función es mostrada en la figura 2.9.

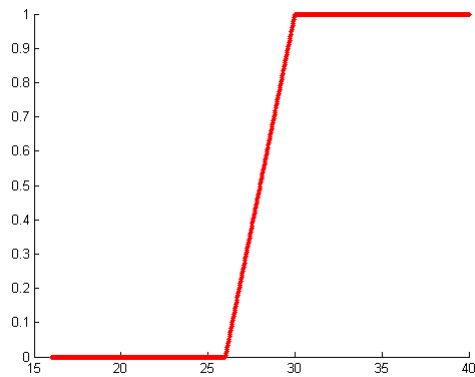


Figura 2.9: Función de membresía Variación Gamma.

### 2.2.1.7 Función de membresía Lambda o L

Las funciones de membresía Lambda usualmente son las que se conocen como funciones de tipo L. Para la construcción de este tipo de funciones se requieren dos parámetros  $a$  y  $m$  dos números reales, tales que  $a < m$ . La ecuación que representa a las funciones Lambda o tipo L es

$$\lambda(x, a, m) = \begin{cases} 1 & x \leq a, \\ (m - x)/(m - a) & a < x < m, \\ 0 & m \leq x. \end{cases} \quad (2.14)$$

Donde  $a$  es el límite superior y  $b$  es el límite inferior. Recordemos que en el ejemplo 2.2.3 se definió una serie de conjuntos difusos que hacen referencia a las estaturas de las personas. El conjunto difuso que hace referencia a una función de membresía  $L$  es  $MB$  con  $a = 145$  y  $b = 150$ , que podemos visualizar en la figura 2.3.

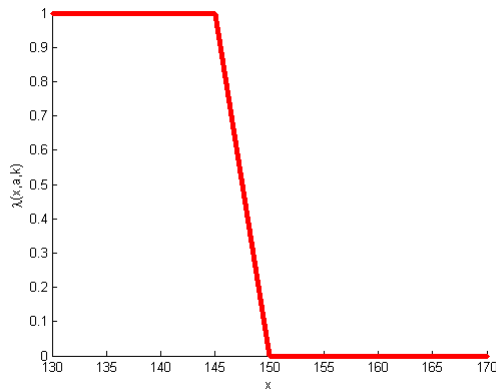


Figura 2.10: Función de membresía Lambda.

Observe que las funciones de tipo  $L$  son reflexiones de las funciones Variación Gamma, es decir,  $\lambda(x, a, m) = 1 - \gamma(x, a, m)$ . Las funciones Lambda son utilizadas para representar valores extremos inferiores, tales como: “muy cerca”, “muy bajo”, “muy frío” o “muy joven”, entre otros.

### 2.2.1.8 Función de membresía $Z$

Las funciones de membresía de tipo  $Z$  son construidas a partir de dos parámetros. Sean  $a$  y  $b$  dos números reales, tales que  $a < b$ . La ecuación que representa a las funciones de tipo  $Z$  es de la forma

$$Z(x, a, b) = \begin{cases} 1 & x \leq a, \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} < x \leq b, \\ 0 & b < x. \end{cases} \quad (2.15)$$

Donde  $a$  es el límite superior y  $b$  el límite inferior.

La figura 2.11 muestra el gráfico de este tipo de funciones, con  $a = 5$  y  $b = 15$ .

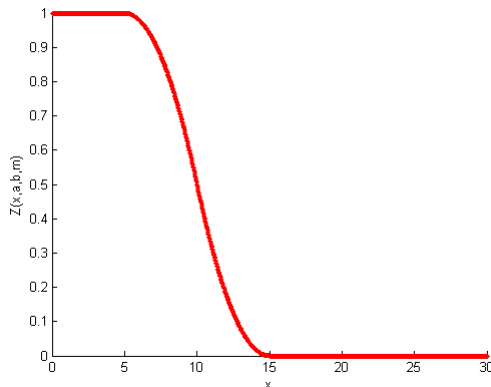


Figura 2.11: Función de membresía  $Z$ .

Observe que las funciones de tipo  $Z$  son reflexiones de las funciones de tipo  $S$ , es decir  $Z(x, a, b) = 1 - S(x, a, b)$ . Estas funciones se utilizan regularmente para representar extremos inferiores en los conjuntos difusos.

Un ejemplo general de una aplicación en el cual se utilicen las funciones de membresía anteriores sería el siguiente:

**Ejemplo. 2.2.4** *Una aplicación de las funciones de membresía podría ser la regulación de*

la temperatura. Supongamos que se tiene un invernadero que siempre debe estar a  $23^{\circ}\text{C}$ . Para mantener esta temperatura se realiza la siguiente acción, abrir o cerrar una válvula que permita el paso del aire caliente. Para este problema se construirán 3 conjuntos difusos asociados a las etiquetas Frío, Tibio y Caliente. Sean  $F$ ,  $T$  y  $C$  tales conjuntos  $F$  para Frío,  $T$  para Tibio y  $C$  para Caliente. Para los conjuntos extremos  $F$  y  $C$  se utilizarán las funciones de membresía  $\lambda$  y  $\gamma$ , respectivamente y el conjunto  $T$  una función triangular que representará las temperaturas cercanas a  $23^{\circ}\text{C}$

$$\lambda_F(x, 18, 23) = \begin{cases} 1 & x \leq 18, \\ \frac{18-x}{23-18} & 18 < x < 23, \\ 0 & 23 \leq x. \end{cases}$$

$$\gamma_C(x, 23, 30) = \begin{cases} 0 & x \leq 23, \\ \frac{x-23}{30-23} & 23 < x < 30, \\ 1 & 30 \leq x. \end{cases}$$

$$\Delta_T(x, 18, 23, 28) = \begin{cases} 0 & x \leq 18 \\ \frac{x-18}{23-18} & 18 < x < 23 \\ \frac{23-x}{23-23} & 23 < x < 28 \\ 0 & 28 \leq x \end{cases}$$

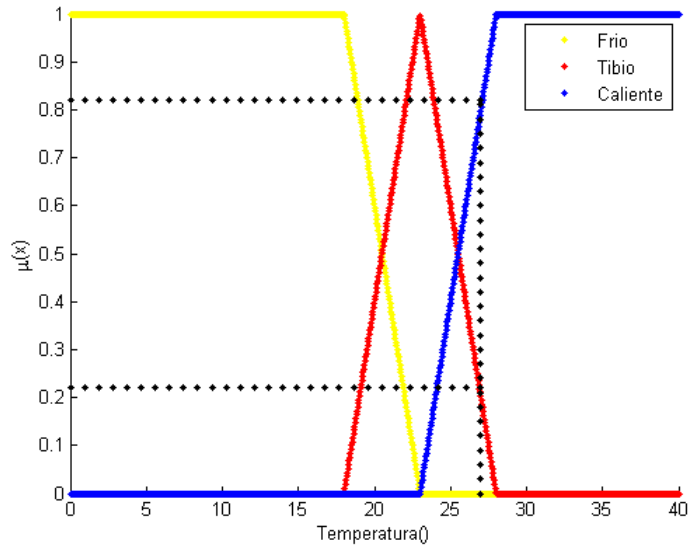


Figura 2.12: Funciones de membresía para la regulación de la temperatura.

## 2.2.2 Definiciones Básicas

Muchos conceptos de la teoría clásica de conjuntos se pueden hacer extensivos a la teoría de conjuntos difusos y otros son propios de esta última.

A continuación presentaremos algunos conceptos básicos más utilizados en la teoría de conjuntos difusos.

**Definición. 2.2.3** (*Igualdad de conjuntos difusos*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso,  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos sobre  $U$ , con funciones de membresía  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  respectivamente. Se dice que  $A = B$  si y sólo si  $\forall x \in U, \mu_A(x) = \mu_B(x)$ .

En la definición anterior, para que dos conjuntos difusos en un mismo Universo  $U$  sean iguales, basta que sus funciones de membresía tengan los mismo valores en cada elemento del Universo. Por lo que no es de extrañarse que muchos autores sólo consideren a las funciones de membresía, para hacer referencia a los conjuntos difusos.

Por ejemplo, dados dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$ , definidos por las funciones de membresía triangulares  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$ , definidas en 2.16 y 2.17, respectivamente,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ (x-1)/2 & 1 < x < 3, \\ (5-x)/2 & 3 < x < 5, \\ 0 & 5 \leq x \end{cases} \quad (2.16)$$

y

$$\mu_B(x) = \text{máx} \left\{ \text{mín} \left\{ \frac{x-1}{2}, 1, \frac{5-x}{2} \right\}, 0 \right\}. \quad (2.17)$$

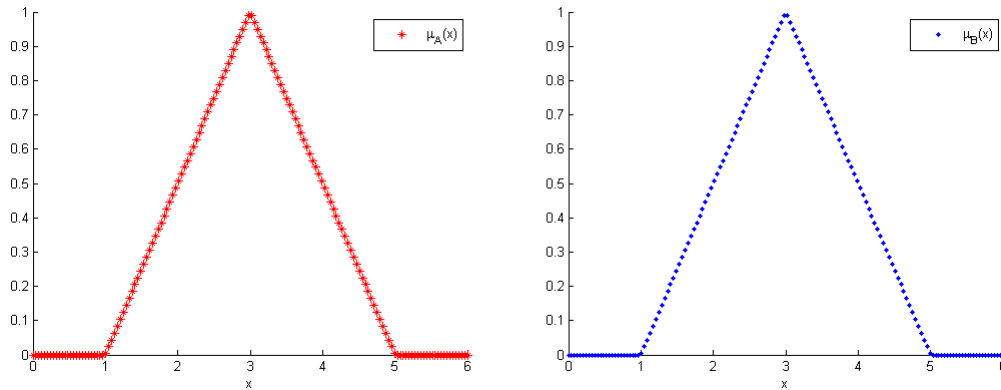


Figura 2.13: Conjuntos de difusos 2.16 y 2.17.

Como podemos apreciar las expresiones 2.16 y 2.17 describen la misma curva (ver figura 2.13), por lo tanto  $A = B$ .

**Definición. 2.2.4** (*Subconjunto difuso*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso,  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos sobre  $U$ , con funciones de membresía trapezoidal  $\mu_A(x)$  y triangular  $\mu_B(x)$  respectivamente. Se dice que  $A$  es subconjunto de  $B$  si y sólo si  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ .

Observemos que en la definición anterior, la condición para que un conjunto difuso sea subconjunto de otro conjunto difuso, los valores de las funciones de membresía del

subconjunto difuso deben ser menores o iguales que los valores de otro conjunto. Geométricamente se puede apreciar que la curva descrita por el subconjunto está por debajo de la otra curva de la función de membresía. El siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos, con funciones de membresía  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  respectivamente, definidos cada uno como sigue:

$$\mu_A(x, 0, 10, 20, 30) = \begin{cases} 0 & x \leq 10, \\ \frac{x-10}{20-10} & 10 < x \leq 20, \\ 1 & 20 < x \leq 30, \\ (30-x)/(30-20) & 20 < x \leq 30, \\ 0 & x \geq 30. \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\mu_B(x, 5, 15, 25) = \begin{cases} 0 & x \leq 5, \\ \frac{x-5}{15-5} & 5 < x < 15, \\ \frac{25-x}{25-15} & 15 < x < 25, \\ 0 & 25 \leq x. \end{cases} \quad (2.19)$$

Como podemos apreciar en la figura 2.14,  $\mu_B \leq \mu_A$ , entonces  $B$  es subconjunto de  $A$ .

La siguiente definición es una condición fundamental para la definición de números difusos, como se verá más adelante.

**Definición. 2.2.5** (*Conjuntos difusos normal*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . Se dice que  $A$  es un conjunto difuso normal, o que  $A$  es normal, si y sólo si existe al menos un  $x \in U$  tal que  $\mu_A(x) = 1$ . En caso contrario, se dice que  $A$  es un conjunto difuso no-normal.

Observe que en la figura 2.14 hace referencia a dos conjuntos difusos normales ya que para  $\mu_B$  hay un elemento del  $U$ ,  $x_0 = 15$ , tal que  $\mu_B(15) = 1$ , mientras que  $\mu_A$  los elementos del intervalo  $[10, 20]$  son los que también toman valores 1.

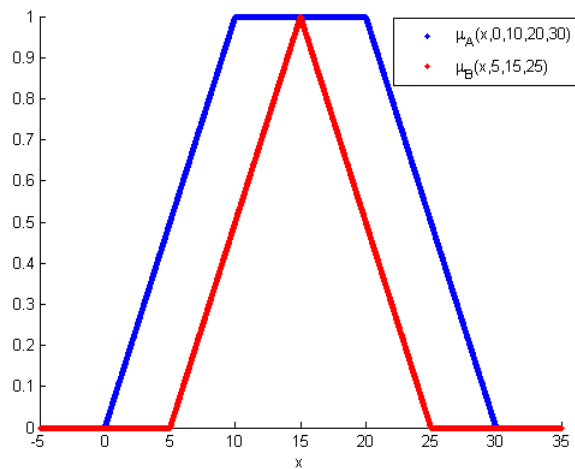


Figura 2.14: Subconjunto difuso.

**Definición. 2.2.6** (*Punto de cruce*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$  con función de membresía  $\mu_A(x)$ . Se dice que  $x \in U$  es un punto de cruce para  $A$  si y sólo si  $\mu_A(x) = 0.5$  y se denotará como  $\text{cruce}(A)$ .

En la figura 2.15 se muestra un ejemplo de la definición anterior.

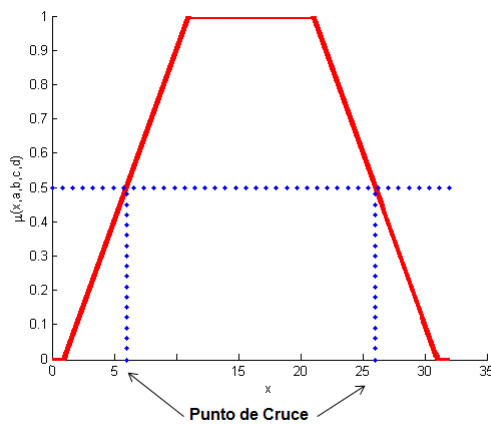


Figura 2.15: Punto de Cruce.

Donde los dos puntos cruce sería  $x_0 = 6$  y  $x_1 = 26$ .

**Definición. 2.2.7** ( $\alpha$ -corte)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso,  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$  con función de membresía  $\mu_A(x)$  y  $\alpha \in (0, 1]$ . Se define el  $\alpha$ -corte de  $A$  como un conjunto clásico que se denota por  $[A]^\alpha$  y definido por

$${}^\alpha A = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (2.20)$$

Si la desigualdad en 2.20 es estricta entonces se dirá que tenemos un  $\alpha$ -corte estricto y se denotará como  ${}^{\alpha+}A$ . Observe que para cualquier  $\alpha \leq 0.5$ , el  ${}^\alpha A$  contiene a todos los elementos del  $\text{cruce}(A)$ . En el capítulo siguiente se verá la construcción de los números difusos a partir de los  $\alpha$ -corte.

**Definición. 2.2.8** (Soporte de conjuntos difusos)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . Se define el soporte de  $A$  como un conjunto clásico  $B$  tal que  $\forall x \in B, \mu_A(x) > 0$  y se denota como  $\text{soporte}(A)$ , i.e.,

$$\text{soporte}(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2.21)$$

La figura 2.16 ilustra el  $\text{soporte}(A)$ .

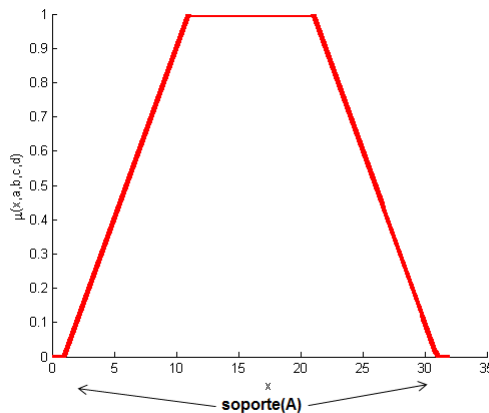


Figura 2.16: Soporte de Conjunto Difuso.

En la mayoría de los conjuntos difusos el soporte es un subconjunto propio del Universo (en el sentido clásico), con excepción de aquellos conjuntos que utilizan funciones de membresía asintóticas, donde el soporte es todo el Universo como las funciones Gamma (ver figura 2.9). Por tal razón la definición 2.2.8 no resulta práctica, para limitar el soporte de funciones asintóticas a un conjunto finito de elementos, se suele modificar 2.21 por

$$\text{soporte}(A) = \{x \in U | \mu_A(x) > \gamma, \gamma > 0\}. \quad (2.22)$$

Eligiendo un valor de  $\gamma$  cercano a cero, y así se eliminan del soporte aquellos elementos cuyo grado de pertenencia al conjunto es muy bajo, consiguiendo a la vez un soporte finito y representativo del conjunto.

**Propiedad. 2.2.1** (*Conjunto Universo*). Sean  $U$  un universo de discurso y si  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ , tal que  $\forall x \in U, \mu_A(x) = 1$ , entonces  $A = U$ .

**Definición. 2.2.9** (*Conjunto vacío difuso*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . Se dice que  $A$  es vacío si y sólo si, su soporte no contiene elementos, es decir,  $\forall x \in U, \mu_A(x) = 0$ .

**Definición. 2.2.10** (*Conjunto difuso convexo*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . Se dice que  $A$  es un conjunto difuso convexo si y sólo si para dos puntos cualesquiera  $x_1$  y  $x_2$ , y cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ , se verifica la inecuación  $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$ .

Esta definición indica que dado dos puntos del universo la función de membresía, del conjunto difuso, evaluada entre esos puntos tomará valores mayores o iguales que la función de membresía evaluada en cada uno de dichos puntos. Este concepto se ilustra gráficamente en la figura 2.17.

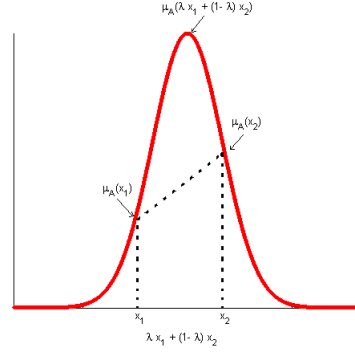


Figura 2.17: Convexidad en conjuntos difusos.

Existe otra forma de ver la convexidad de los conjuntos difusos empleando el concepto de  $\alpha$ -cortes, es decir, un conjunto difuso  $A$  es convexo si  $\forall \alpha \in (0, 1]$ , los  $\alpha$ -cortes son convexos (en el sentido clásico, es decir “un conjunto es convexo si para todo par de elementos del conjunto la línea recta que une a cada par está totalmente contenida en el conjunto”).

**Definición. 2.2.11** (Núcleo de conjuntos difusos)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . El núcleo de  $A$  se define como un conjunto clásico  $B$  en  $U$  tal que  $\forall x \in B, \mu_A(x) = 1$  y se denota como  $nucleo(A)$ , i.e.,

$$nucleo(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}. \quad (2.23)$$

La figura 2.18 ilustra el núcleo de un conjunto  $A$  cuya función de membresía es una función trapezoidal, en este caso  $nucleo(A) = [11, 21]$ .

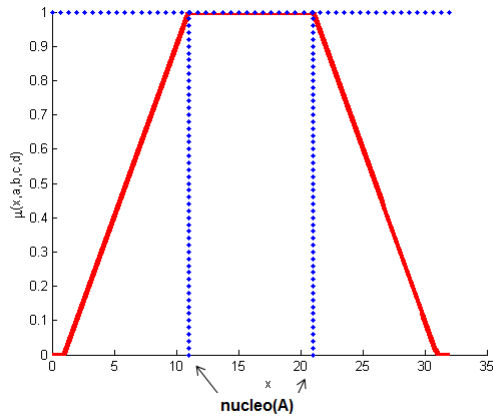


Figura 2.18: Núcleo de conjuntos difusos.

Observe que si  $A$  es un conjunto difuso convexo, su núcleo también es convexo.

**Definición. 2.2.12** (*Frontera de conjuntos difusos*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso en  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . La frontera de  $A$  es el subconjunto de  $U$  cuyos elementos tienen grados de pertenencia en  $A$  comprendidos entre cero y uno, es decir,

$$\text{frontera}(A) = \{x \in U \mid 0 < \mu_A(x) < 1\}. \quad (2.24)$$

En la figura 2.18 se observa que la frontera es  $(1, 11) \cup (21, 31)$ .

**Definición. 2.2.13** (*Peso o altura de conjuntos difusos*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . El peso o altura de  $A$  es el máximo valor de la función de membresía  $\mu_A$ .

Observe que si  $A$  es un conjunto difuso normal, su peso es 1. En la figura 2.19 podemos apreciar la representación de la definición .

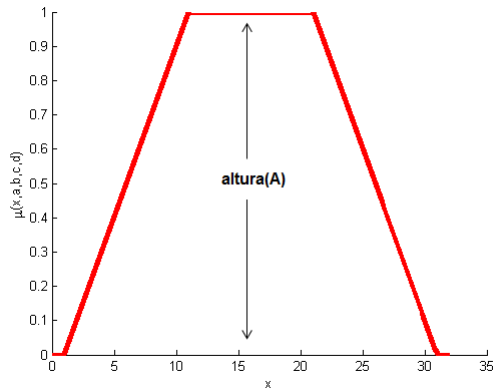


Figura 2.19: Peso o altura de conjuntos difusos.

**Definición. 2.2.14** (*Conjunto unitario o sigleton*)[12]. Sean  $U$  un universo de discurso y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ . Se dice que  $A$  es unitario si y sólo si, su soporte tiene un sólo elemento.

La figura 2.20 muestra un ejemplo de la definición, con  $\mu_A(x) = 1$ .

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 10, \\ 0 & x \neq 10. \end{cases}$$

## 2.3 Operaciones Básicas entre Conjuntos Difusos

A continuación se describirán tres operaciones básicas en la teoría de conjuntos difusos como lo son: el complemento, la unión y la intersección.

En las siguientes definiciones se considerará a  $U$  como el universo de discurso, y a los conjuntos difusos  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre  $U$ , con funciones de membresía  $\mu_A(x)$ ,  $\mu_B(x)$  y  $\mu_C(x)$  respectivamente.

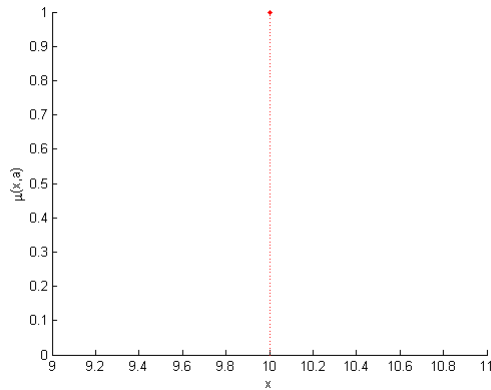


Figura 2.20: Conjunto unitario o singleton.

**Definición. 2.3.1** (Complemento estándar)[6]. Sea  $A$  un conjunto difuso, se define el complemento estándar de  $A$  como

$$\bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x)) | x \in U$$

donde

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in U$$

En la figura 2.21 se muestran las gráficas al conjunto  $A$  y  $\bar{A}$  donde la función de membresía  $\mu_A$  es una función trapezoidal.

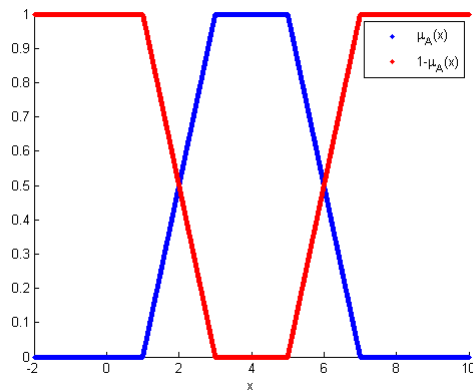


Figura 2.21: Función de membresía trapezoidal y su complemento estándar.

**Definición. 2.3.2** (*Intersección estándar*)[6]. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos, se define la intersección estándar de  $A$  con  $B$  como

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)) | x \in U\}$$

donde

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$$

La siguiente figura muestra la intersección estándar de los conjuntos  $A$  y  $\bar{A}$  de la figura 2.21.

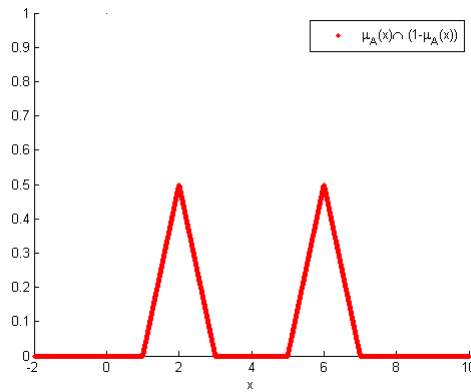


Figura 2.22: Función de membresía trapezoidal y su intersección estándar.

**Definición. 2.3.3** (*Unión estándar*)[6]. Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos, se define la unión estándar de  $A$  con  $B$  como

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) | x \in U\}$$

donde

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$$

La gráfica de la unión estándar de los conjuntos difusos de  $A$  y  $\bar{A}$  de la figura 2.21 está en la siguiente figura

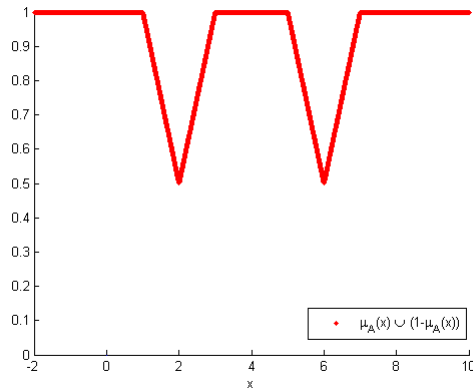


Figura 2.23: Unión estándar entre conjuntos difusos.

Observe que a diferencia de la teoría clásica de conjuntos, en la cual un conjunto  $A$  y su complemento  $\bar{A}$  obtendríamos que  $A \cup \bar{A} = U$ , pero la teoría de conjuntos difusos no cumple con esa propiedad, ya que como se observa en la figura anterior existe un rango de valores entre  $(1, 3)$  y  $(5, 7)$  en los que no se cumple que  $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) = 1$ .

Debido a lo anterior es necesario realizar un análisis de las propiedades de los conjuntos clásicos y así determinar cuales son las que se cumplen dentro de la teoría de conjuntos difusos.

## 2.4 Propiedades de los Conjuntos Difusos

En este apartado se presentan las propiedades de la teoría clásica de conjuntos en los conjuntos difusos y se realizan las demostraciones de estas, ya que en la literatura que hace referencia a estas propiedades sólo se listan pero no existe una demostración de ellas. A continuación se analizará qué leyes se cumplen dentro de los conjuntos difusos y cuáles no.

**Propiedad. 2.4.1** (*Leyes de Idempotencia*)[12]. Sea  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$ , entonces

a)  $A \cup A = A$

b)  $A \cap A = A$

**Demostración.** a) Sean  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$  y  $A \cup A = \{(x, \mu_{A \cup A}(x)) : \forall x \in U\}$  para demostrar  $A \cup A = A$ , por la definición 2.2.3, bastará probar que  $\mu_A(x) = \mu_{A \cup A}(x)$ .

En efecto, como

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup A}(x) &= \text{máx} \{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_A(x),\end{aligned}$$

es decir

$$\mu_{A \cup A}(x) = \mu_A(x),$$

lo que demuestra que

$$A \cup A = A.$$

b) Por probar que  $\mu_A(x) = \mu_{A \cap A}(x)$ .

Como

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap A}(x) &= \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_A(x),\end{aligned}$$

es decir,

$$\mu_{A \cap A}(x) = \mu_A(x).$$

Se concluye que

$$A \cap A = A.$$

■

**Propiedad. 2.4.2** (*Propiedad de Identidad*)[12]. Sea  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$  y  $\emptyset$  el conjunto vacío, entonces

a)  $A \cup \emptyset = A$

b)  $A \cap \emptyset = \emptyset$

**Demostración. a)** Sean  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$  y  $A \cup \emptyset = \{(x, \mu_{A \cup \emptyset}) : \forall x \in U\}$ , hay que probar que  $\mu_A(x) = \mu_{A \cup \emptyset}$ . En efecto, como

$$\mu_{A \cup \emptyset}(x) = \text{máx} \{\mu_A(x), \mu_{\emptyset}(x)\}$$

y recordemos que  $\mu_{\emptyset}(x) = 0$  (ver definición 2.2.4), en consecuencia

$$\mu_{A \cup \emptyset}(x) = \mu_A(x).$$

Se concluye que

$$A \cup \emptyset = A.$$

**Demostración. b)** Por probar que  $\mu_{\emptyset}(x) = \mu_{A \cap \emptyset}$ . Como

$$\mu_{A \cap \emptyset}(x) = \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_{\emptyset}(x)\}$$

y  $\mu_{\emptyset}(x) = 0$ , se tiene que,

$$\mu_{A \cap \emptyset}(x) = \mu_{\emptyset}(x).$$

Por lo tanto

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

■

**Propiedad. 2.4.3** (*Propiedad de Transitividad*)[12]. Sean  $A, B$  y  $C$  tres conjuntos difusos sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$ ,  $\mu_B$  y  $\mu_C$ , respectivamente.

- Si  $A \subset B \subset C$ , entonces  $A \subset C$

**Demostración.** Como  $A \subset B \subset C$  entonces, por la definición 2.2.4,  $\forall x \in U : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$ .

Así,

$$\mu_A(x) \leq \mu_C(x).$$

Se concluye que

Si  $A \subset B \subset C$ , entonces  $A \subset C$ .

■

**Propiedad. 2.4.4** (*Involución del Complemento*)[12]. Sea  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$ , entonces  $\bar{\bar{A}} = A$

**Demostración.** Sea  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$  y  $\bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x)) : \forall x \in U\}$ , hay que probar que  $\mu_A(x) = \mu_{\bar{\bar{A}}}(x)$ . En efecto, por la definición 2.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{\bar{A}}}(x) &= (1 - (1 - \mu_A(x))) \\ &= \mu_A(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$\mu_{\bar{\bar{A}}}(x) = \mu_A(x),$$

lo que demuestra que

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

■

**Propiedad. 2.4.5** (*Propiedad Conmutativa*)[12]. Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$  y  $\mu_B$ , respectivamente, entonces

a)  $A \cup B = B \cup A$

b)  $A \cap B = B \cap A$

**Demostración.** a) Sean  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$ ,  $B = \{(x, \mu_B(x)) : \forall x \in U\}$  y  $A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) : \forall x \in U\}$  y  $B \cup A = \{(x, \mu_{B \cup A}(x)) : \forall x \in U\}$ , por la definición 2.3.3, debemos probar que  $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_{B \cup A}(x)$ . En efecto,

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup B}(x) &= \text{máx} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ &= \text{máx} \{\mu_B(x), \mu_A(x)\},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_{B \cup A}(x),$$

lo que demuestra que

$$A \cup B = B \cup A.$$

**Demostración.** b) Por demostrar que  $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_{B \cap A}(x)$ . En efecto,

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}(x) &= \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ &= \text{mín} \{\mu_B(x), \mu_A(x)\},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_{B \cap A}(x).$$

Lo que demuestra que

$$A \cap B = B \cap A.$$

■

**Propiedad. 2.4.6** (*Propiedad Asociativa*)[12]. Sea  $A, B$  y  $C$  tres conjuntos difusos sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A, \mu_B$  y  $\mu_C$ , respectivamente, entonces

a)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

**Demostración.** a) Sean  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$ ,  $B = \{(x, \mu_B(x)) : \forall x \in U\}$ ,  $C = \{(x, \mu_C(x)) : \forall x \in U\}$  y  $\mu_{(A \cup B) \cup C} = \{(x, \mu_{(A \cup B) \cup C}(x)) : \forall x \in U\}$  y  $\mu_{A \cup (B \cup C)} = \{(x, \mu_{A \cup (B \cup C)}(x)) : \forall x \in U\}$ , por la definición 2.3.3, debemos demostrar que  $\mu_{A \cup (B \cup C)}(x) = \mu_{(A \cup B) \cup C}(x)$ . En efecto, puesto que

$$\mu_{(A \cup B) \cup C}(x) = \text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \}$$

y

$$\mu_{A \cup (B \cup C)}(x) = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \},$$

por demostrar que

$$\text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \},$$

esto es verificable considerando los seis siguiente casos posibles.

**Caso 1.**  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} &= \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_C(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_C(x) \end{aligned}$$

de donde

$$\text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 2.**  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_B(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} &= \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_B(x). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \\ &= \mu_B(x), \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 3.**  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_C(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_C(x). \end{aligned}$$

De donde,

$$\text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 4.**  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_A(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_A(x), \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 5.**  $x \in U$  y  $\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} &= \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_B(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \\ &= \mu_B(x), \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 6.**  $x \in U$  y  $\mu_C(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \\ &= \mu_A(x), \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{máx} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} = \text{máx} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}.$$

Tomando en cuenta los seis casos anteriores, se concluye que

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

**Demostración.** **b)** De manera análoga al inciso **a)** se muestra que  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

■

**Propiedad. 2.4.7** (*Leyes de Absorción*)[12]. Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$  y  $\mu_B$ , respectivamente, entonces

a)  $(A \cup B) \cap B = B$

b)  $(A \cap B) \cup B = B$

**Demostración.** a) Sea  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$ ,  $B = \{(x, \mu_B(x)) : \forall x \in U\}$  y  $(A \cup B) \cap B = \{(x, \mu_{(A \cup B) \cap B}(x)) : \forall x \in U\}$ , por la definición 2.3.3, debemos demostrar que  $\mu_B(x) = \mu_{(A \cup B) \cap B}(x)$ .

En efecto, puesto que

$$\mu_{(A \cup B) \cap B}(x) = \text{mín} \{ \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_B(x) \},$$

consideremos los siguiente dos casos.

**Caso 1.**  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cup B) \cap B}(x) &= \text{mín} \{ \mu_B(x), \mu_B(x) \} \\ &= \mu_B(x). \end{aligned}$$

Así,

$$\mu_{(A \cup B) \cap B}(x) = \mu_B(x).$$

Esto demuestra que,

$$(A \cup B) \cap B = B$$

**Caso 2.**  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cup B) \cap B}(x) &= \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \\ &= \mu_B(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$\mu_{(A \cup B) \cap B}(x) = \mu_B(x).$$

De los casos anteriores concluimos que

$$(A \cup B) \cap B = B.$$

**Demostración. b)** Para demostrar  $(A \cap B) \cup B = B$  hay que probar que  $\mu_B(x) = \mu_{(A \cap B) \cup B}(x)$ . En efecto, puesto que,

$$\mu_{(A \cap B) \cup B}(x) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_B(x) \},$$

consideraremos los siguientes casos.

**Caso 1.**  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cap B) \cup B}(x) &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \\ &= \mu_B(x), \end{aligned}$$

de aquí que,

$$\mu_{(A \cap B) \cup B}(x) = \mu_B(x).$$

Esto demuestra que

$$(A \cap B) \cup B = B.$$

**Caso 2.**  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cap B) \cup B}(x) &= \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_B(x) \} \\ &= \mu_B(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$\mu_{(A \cap B) \cup B}(x) = \mu_B(x).$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup B = B$$

■

**Propiedad. 2.4.8** (*Propiedad de Absorción*)[12]. Sea  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$  y  $\emptyset$  el conjunto vacío, entonces

a)  $A \cup U = U$

b)  $A \cap \emptyset = \emptyset$

**Demostración.** a) Como  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$  y  $A \cup U = \{(x, \mu_{A \cup U}(x)) : \forall x \in U\}$ , por definición 2.3.3, se debe demostrar que  $\mu_U(x) = \mu_{A \cup U}(x)$ . En efecto, puesto que

$$\mu_{A \cup U}(x) = \text{máx} \{\mu_A(x), \mu_U(x)\}$$

y  $\mu_U(x) = 1$ , entonces

$$\mu_{A \cup U}(x) = \mu_U(x).$$

Se concluye que

$$A \cup U = U.$$

**Demostración.** b) Por la definición 2.3.2, se debe demostrar que  $\mu_{\emptyset}(x) = \mu_{A \cap \emptyset}(x)$ . En efecto, puesto que,

$$\mu_{A \cap \emptyset}(x) = \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_{\emptyset}(x)\}$$

y de la definición 2.2.9,  $\mu_{\emptyset}(x) = 0$ , entonces

$$\mu_{A \cap \emptyset}(x) = \mu_{\emptyset}(x),$$

se concluye que,

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

■

**Propiedad. 2.4.9** (*Propiedad Distributiva*)[12]. Sea  $A, B$  y  $C$  tres conjuntos difusos sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$ ,  $\mu_B$  y  $\mu_C$ , respectivamente, entonces

- a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Demostración. a)**

Sean  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$ ,  $B = \{(x, \mu_B(x)) : \forall x \in U\}$  y  $C = \{(x, \mu_C(x)) : \forall x \in U\}$  y  $A \cap (B \cup C) = \{(x, \mu_{A \cap (B \cup C)}(x)) : \forall x \in U\}$  y  $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{(x, \mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x)) : \forall x \in U\}$ , debemos demostrar que  $\mu_{A \cap (B \cup C)}(x) = \mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x)$ . En efecto, puesto que

$$\mu_{A \cap (B \cup C)} = \text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}$$

y

$$\mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \},$$

por demostrar que,

$$\text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}.$$

Esto último es verificable considerando los seis siguientes casos posibles.

**Caso 1.** Sea  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_A(x) \} \\ &= \mu_A(x), \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 2.**  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_B(x)$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_A(x) \}, \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

De donde,

$$\text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 3.** Sea  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x)$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \\ &= \mu_B(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_A(x) \}, \\ &= \mu_B(x). \end{aligned}$$

De donde,

$$\text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 4.** Sea  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_C(x) \leq \mu_A(x)$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \}, \\ &= \mu_C(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \}, \\ &= \mu_C(x). \end{aligned}$$

De donde,

$$\text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 5.**  $\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \}, \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}.$$

**Caso 6.**  $\mu_C(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \\ &= \mu_B(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \} &= \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \}, \\ &= \mu_B(x), \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{mín} \{ \mu_A(x), \text{máx} \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}.$$

De los seis casos anteriores, se concluye que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**Demostración. b)** De manera análoga al inciso **a)** se demuestra que  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

■

De todo lo anterior, se concluye que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Propiedad. 2.4.10** (*Leyes de De Morgan*)[12]. Sea  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A$  y  $\emptyset$  el conjunto vacío, entonces

$$\text{a) } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\text{b) } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

**Demostración. a)** Sean  $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in U\}$ ,  $B = \{(x, \mu_B(x)) : \forall x \in U\}$  y  $\overline{A \cup B} = \{(x, \mu_{\overline{A \cup B}}(x)) : \forall x \in U\}$  hay que probar que  $\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = \mu_{\overline{A \cup B}}(x)$ , ver definición 2.3.3 y 2.3.1. En efecto, puesto que,

$$\mu_{\overline{A \cup B}} = 1 - \text{máx} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

y

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}} = \text{mín} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\},$$

entonces se tiene que probar que

$$1 - \text{máx} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \text{mín} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

esto se verificara considerando siguientes dos casos posibles.

**Caso 1.**  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Por consiguiente,

$$1 - \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = 1 - \mu_B(x)$$

y

$$\text{mín} \{ 1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \} = 1 - \mu_B(x).$$

Así,

$$1 - \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = \text{mín} \{ 1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \}.$$

**Caso 2.**  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

Por consiguiente,

$$1 - \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = 1 - \mu_A(x)$$

y

$$\text{mín} \{ 1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \} = 1 - \mu_A(x)$$

Así,

$$1 - \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = \text{mín} \{ 1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \}$$

Del Caso 1 y Caso 2 se tiene que

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

**Demostración. b)** Ahora demostraremos que  $\mu_{\overline{A \cap B}}(x) = \mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x)$ . En efecto, puesto que,

$$\mu_{\overline{A \cap B}} = 1 - \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

y

$$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}} = \text{máx} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

por demostrar que,

$$1 - \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \text{máx} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\},$$

para ello consideremos los siguientes casos.

**Caso 1.**  $x \in U$  y  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Por consiguiente,

$$1 - \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = 1 - \mu_A(x)$$

y

$$\text{máx} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} = 1 - \mu_A(x),$$

de donde

$$1 - \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \text{máx} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}.$$

**Caso 2.**  $x \in U$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

Por consiguiente,

$$1 - \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = 1 - \mu_B(x)$$

y

$$\text{máx} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} = 1 - \mu_B(x).$$

Así,

$$1 - \text{mín} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \text{máx} \{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}.$$

■

Del caso 1 y 2 se concluye que

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

No todas las propiedades de los conjuntos clásicos se tienen porque cumplir en los conjuntos difusos. Por ejemplo, en la figura 2.21 se muestra un conjunto difuso  $A$  y su complemento  $\bar{A}$ , la cual demuestra que  $A \cup \bar{A} \neq U$ , ver figura 2.23. Lo mismo sucede con el principio de no contradicción. Si en vez de emplearse el máximo y el mínimo como operadores de unión e intersección, respectivamente, se escogen apropiadamente otras funciones, estas dos propiedades pueden cumplirse en los conjuntos difusos, sin embargo lo que se ha querido constatar es que no tienen porqué ser ciertas [12]. Las funciones de membresía para representar la unión, intersección y complemento de conjuntos difusos fueron propuestas por el profesor Lofti A. Zadeh en el desarrollo inicial de la teoría de conjuntos difusos [1].

# Capítulo 3

## Números Difusos

### 3.1 Introducción

Existen muchas expresiones humanas que hacen referencia a proposiciones asociadas a cantidades numéricas que involucran cierto grado de imprecisión. Por ejemplo; “Él tiene alrededor de 20 años”, “Estuve más de 25 minutos esperándote” o “Espero hacer no menos de un millón pesos con este acuerdo”. L. A. Zadeh introduce por primera vez el concepto de números difusos con el propósito de manipular y analizar expresiones como; “próximos a 0”, “casi 5”, entre otros [2]. Al igual que la lógica difusa es una extensión de la lógica clásica, un número difuso se puede considerar como una extensión de un número real.

Este capítulo está dedicado al concepto Números Difusos, Operaciones Aritméticas y sus Propiedades, que son el fundamento teórico en la construcción del sistema desarrollado en este trabajo.

## 3.2 Números difusos

Como ya se mencionó anteriormente, los números difusos se utilizan para modelar expresiones que involucran cantidades numéricas, con cierta imprecisión. Éstos generalizan el concepto de números reales, ya que se les puede asociar una función característica que cumpla con las condiciones de las funciones de membresía para números difusos. En esta sección se presentará el concepto de número difuso, los tipos de números difusos, así como también un método para la construcción de tales números.

**Definición. 3.2.1** (*Número Difuso*)[10]. Sean  $\mathbf{R}$  el conjunto de los números reales y  $A$  un conjunto difuso sobre  $\mathbf{R}$ , se dice que  $A$  es un Número Difuso si y sólo si  $A$  es convexo y normalizado.

Los números difusos se puede clasificar en: Unimodales y Flat. Los unimodales se utilizan para representar la propiedad de proximidad a una cantidad determinada, llamada valor central del número difuso. Sea  $a \in R$ , para definir un número difuso unimodal se utiliza una función de membresía con la siguiente estructura

$$\mu_A(x) = \begin{cases} l(x) & \text{si } x < a, \\ 1 & \text{si } x = a, \\ r(x) & \text{si } x > a. \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde  $l : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1)$  y  $r : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1)$ , son funciones monótonas creciente y decreciente, respectivamente.

En particular, cualquier número real  $r$ , puede representarse mediante un número difuso unimodal cuya función de mebresía  $\mu_r$  estaría definida como,

$$\mu_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < r, \\ 1 & \text{si } x = r, \\ 0 & \text{si } x > r. \end{cases}$$

Esto muestra que los números reales pueden ser extendidos al conjunto de los números difusos. Otras funciones de membresía para números difusos unimodales son: las gaussianas y triangulares, son ejemplos de números difusos unimodales, aclarando que su altura debe ser igual a 1.

Otro tipo de números difusos son los llamados flat o planos. Para definir un número difuso plano  $A$ , la función de membresía debe de tener la siguiente estructura

$$\mu_A(x) = \begin{cases} l(x) & \text{si } x < b, \\ 1 & \text{si } x \in [b, c], \\ r(x) & \text{si } x > c. \end{cases} \quad (3.2)$$

Donde  $b, c \in \mathbf{R}$ ,  $b < c$ ,  $l : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1)$  y  $r : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1)$ , son funciones monótonas creciente y decreciente, respectivamente.

Las funciones de membresía trapezoidales, lambda, gamma,  $s$  y  $z$ , son utilizadas para representar números difusos planos, cuya altura debe ser igual a 1.

Desde el punto de vista operacional, sólo necesitamos considerar números difusos planos ya que los unimodales puede ser visto como un caso particular, donde  $b = c = a$ . Por otro lado, los casos extremos de  $c = \infty$  (figura 2.9) o  $b = -\infty$  (figura 2.10) puede ser interpretados como una versión difusa de conceptos: ser demasiado grande y ser demasiado pequeño, respectivamente. Sin embargo, no se consideran números difusos, pero se pueden realizar ciertas modificaciones para que tales funciones sean consideradas funciones de membresía de números difusos. Por ejemplo, en la figura 2.9 se muestra la gráfica de una función de membresía que no cumple con la definición de número difuso ya que  $c = \infty$ . Para que la función de membresía antes mencionada pueda representar a un número difuso, debemos establecer una restricción para el parámetro  $c$ , como se muestra en la figura 3.2 con  $c = 6$ .

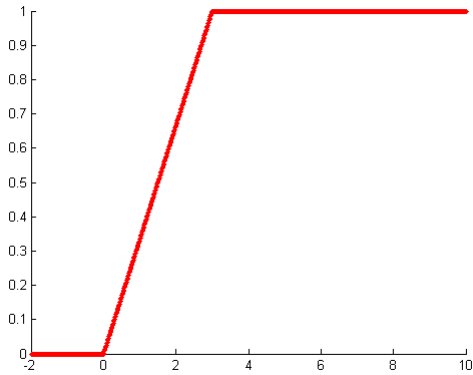


Figura 3.1: Función de membresía variación Gamma, no representa Número Difuso.

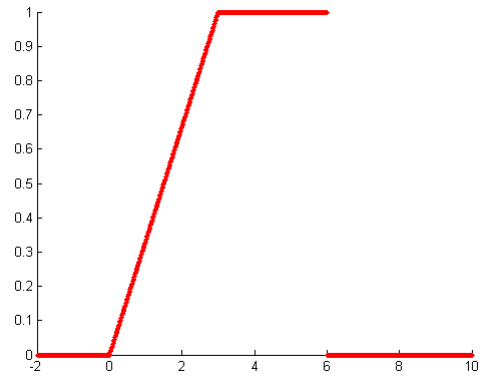


Figura 3.2: Función de membresía variación Gamma, con restricción para representar Número Difuso.

### 3.3 $\alpha - corte$

Si  $A$  es un conjunto difuso sobre  $U$ , con función de membresía  $\mu_A(x)$ , recordemos que el  $\alpha - corte$  se define como:  ${}^\alpha A = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ , donde  $\alpha \in [0, 1]$  el cual determina el nivel o la altura de corte de la función. Dependiendo de la estructura de la función de membresía, el  $\alpha - corte$  es un intervalo o una unión de intervalos. Este concepto se a convertido en una herramienta para determinar mayor confianza en el cálculo de parámetros que se puedan modelar con números difusos. Por ejemplo, Schulz y Huwe (1997, 1999), lo utilizaron para modelar la incertidumbre y el análisis de sensibilidad de los modelos de transporte de agua en un perfil de suelo en capas, sujeta a las condiciones de contorno impreciso y las propiedades hidráulicas [14]. Los  $\alpha - cortes$  también se utilizan para la realización de operaciones aritméticas, como suma, resta, multiplicación y división.

A continuación mostraremos las propiedades fundamentales de los  $\alpha - cortes$ .

#### 3.3.1 Propiedades de los $\alpha - cortes$

En este apartado se listan las propiedades de los  $\alpha - cortes$  las cuales involucran las operaciones básicas entre conjuntos difusos como se definieron en la sección 2.3. Todas estas

propiedades son expresadas como teoremas.

Antes de presentar los teoremas que tratan las propiedades de los  $\alpha$  – cortes, es conveniente definir el  $\alpha$  – corte estricto.

**Definición. 3.3.1** ( $\alpha$  – corte estricto)[7]. Sea  $A$  un conjunto difuso definido sobre  $U$ , cuya función de membresía es  $\mu_{A(x)}$  y cualquier número  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha$  – corte estricto, denotado como  ${}^{\alpha+}A$  y definido por

$${}^{\alpha+}A = \{x \in U \mid \mu_A(x) > \alpha\}, \alpha > 0 \quad (3.3)$$

Al igual que los  $\alpha$  – cortes, representan intervalos salvo que estos últimos son intervalos abiertos o uniones de intervalos abiertos, dependiendo de la estructura de la función de membresía.

Las siguientes propiedades están relacionadas con el concepto de unión, intersección, complemento y subconjuntos.

**Teorema 3.3.1** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos en  $U$ . Entonces las siguientes propiedades se tienen para todo  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  :

- (i)  ${}^{\alpha+}A \subseteq^{\alpha} A$ ;
- (ii)  $\alpha \leq \beta$  implica  ${}^{\alpha}A \supseteq^{\beta} A$  y  ${}^{\alpha+}A \supseteq^{\beta+} A$ ;
- (iii)  ${}^{\alpha}(A \cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$  y  ${}^{\alpha}(A \cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$ ;
- (iv)  ${}^{\alpha+}(A \cap B) = {}^{\alpha+}A \cap {}^{\alpha+}B$  y  ${}^{\alpha+}(A \cup B) = {}^{\alpha+}A \cup {}^{\alpha+}B$ ;
- (v)  ${}^{\alpha}(\bar{A}) = {}^{(1-\alpha)+} \bar{A}$

**Demostración.** Ver [7].

**Teorema 3.3.2** Sean  $I$  un conjunto de índices y  $A_i$  un conjunto difuso definido sobre  $U$ , para todo  $i \in I$ . Entonces,

$$(vi) \bigcup_{i \in I} {}^\alpha A_i \subseteq {}^\alpha \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \text{ y } \bigcap_{i \in I} {}^\alpha A_i = {}^\alpha \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right);$$

$$(vii) \bigcup_{i \in I} {}^{\alpha+} A_i \subseteq {}^{\alpha+} \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \text{ y } \bigcap_{i \in I} {}^{\alpha+} A_i = {}^{\alpha+} \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right);$$

**Demostración.** Ver [7].

**Teorema 3.3.3** Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos definido sobre  $U$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Entonces

$$(viii) A \subseteq B \text{ si y sólo si } {}^\alpha A \subseteq {}^\alpha B;$$

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } {}^{\alpha+} A \subseteq {}^{\alpha+} B;$$

$$(ix) A = B \text{ si y sólo si } {}^\alpha A = {}^\alpha B;$$

$$A = B \text{ si y sólo si } {}^{\alpha+} A = {}^{\alpha+} B$$

**Demostración.** Ver [7].

**Teorema 3.3.4** Sea  $A$  un conjunto difuso definido sobre  $U$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades

$$(x) {}^\alpha A = \bigcap_{\beta < \alpha} {}^\beta A = \bigcap_{\beta < \alpha} {}^{\beta+} A;$$

$$(xi) {}^{\alpha+} A = \bigcup_{\alpha < \beta} {}^\beta A = \bigcup_{\alpha < \beta} {}^{\beta+} A;$$

**Demostración.** Ver [7].

### 3.3.2 Representación de Conjuntos Difusos mediante $\alpha - corte$

El rol principal de  $\alpha - cortes$  y  $\alpha - cortes$  estrictos en la teoría de conjuntos difusos, es su capacidad para representar a los conjuntos difusos. En esta sección se muestra como cada conjunto difuso puede ser representado por el conjunto de todos sus  $\alpha - cortes$  o conjuntos de sus  $\alpha - cortes$  estrictos. Cualquiera de estas representaciones nos permite ampliar las distintas propiedades de los conjuntos clásicos sobre los conjuntos difusos.

Antes de ver los teoremas de descomposición, se mostrará un sencillo ejemplo de como un conjunto difuso puede ser representado por la unión de sus  $\alpha - cortes$ .

Sean  $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  y  $A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.4), (x_3, 0.6), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}$ , una forma distinta para representar al conjunto difuso  $A$ , es

$$A = .2/x_1 + .4/x_2 + .6/x_3 + .8/x_4 + 1/x_5$$

Para este ejemplo, sólo se utilizarán cinco  $\alpha - cortes$ , que son los siguientes

$$\begin{aligned} .2A &= \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \} \\ .4A &= \{ x_2, x_3, x_4, x_5 \} \\ .6A &= \{ x_3, x_4, x_5 \} \\ .8A &= \{ x_4, x_5 \} \\ .1A &= \{ x_5 \} \end{aligned}$$

Los cuales también se pueden representar como

$$\begin{aligned} .2A &= 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5, \\ .4A &= 0/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5, \\ .6A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5, \\ .8A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5, \\ .1A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5, \end{aligned}$$

Ahora se convierte cada uno de los  $\alpha - cortes$  a un conjunto difuso especial  ${}_{\alpha}A$ , definidos por

$${}_{\alpha}A(x) := \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x) \quad (3.4)$$

De aquí se obtiene que

$$\begin{aligned} .2A &= .2/x_1 + .2/x_2 + .2/x_3 + .2/x_4 + .2/x_5, \\ .4A &= 0/x_1 + .4/x_2 + .4/x_3 + .4/x_4 + .4/x_5, \\ .6A &= 0/x_1 + 0/x_2 + .6/x_3 + .6/x_4 + .6/x_5, \\ .8A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + .8/x_4 + .8/x_5, \\ {}_1A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5, \end{aligned}$$

Observe que la unión estándar de los cinco conjuntos especiales  ${}_{\alpha}A$  es exactamente el mismo conjunto difuso  $A$ , es decir,

$$A = {}_{.2}A \cup {}_{.4}A \cup {}_{.6}A \cup {}_{.8}A \cup {}_1A.$$

Cabe mencionar que la representación de los conjuntos difusos a través de sus conjuntos difusos especiales  ${}_{\alpha}A$  asociados a su  ${}^{\alpha}A$ , es universal, sin importar si el conjunto universo es finito o infinito. Los  ${}_{\alpha}A$  forman la descomposición del conjunto difuso  $A$ .

A continuación se presentan los dos teoremas básicos para la descomposición de conjuntos difusos, cabe mencionar que la demostración de estos teoremas puede ser consultada en [7].

**Teorema 3.3.5** (*Primer Teorema de Descomposición*).  $\forall x \in U$  y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , entonces

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}A. \quad (3.5)$$

**Demostración.** Ver [7].

Donde  ${}_{\alpha+}A$  es definido como en la ecuación 3.4 y  $\cup$  denota la unión estándar.

**Teorema 3.3.6** (*Segundo Teorema de Descomposición*).  $\forall x \in U$  y  $A$  un conjunto difuso sobre  $U$ , entonces

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A. \quad (3.6)$$

**Demostración.** Ver [7].

Donde  ${}_{\alpha+}A = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A$ .

## 3.4 Operaciones Aritméticas sobre Intervalos Cerrados

La aritmética de números difusos, está basada en la aritmética de intervalos cerrados debido a que un número difuso puede ser visto como una descomposición de sus conjuntos difusos especiales  ${}_{\alpha}A$  (ver ecuación 3.4), los cuales están asociados a sus  ${}^{\alpha}A$ , que son intervalos cerrados.

En esta sección se presentan las definiciones de las operaciones aritméticas utilizadas para la implementación del sistema que se ha desarrollado, así como sus propiedades aritméticas.

Las cuatro operaciones aritméticas sobre intervalos cerrados son definidas como se muestra a continuación

**Definición. 3.4.1** Sean  $[a, b]$  y  $[d, e]$  dos intervalos cerrados de números reales. Se define la suma, resta, producto y división, como sigue, respectivamente,

**a)**  $[a, b] + [d, e] = [a + d, b + e],$

**b)**  $[a, b] - [d, e] = [a - e, b - d],$

$$c) [a, b] \cdot [d, e] = [\text{mín}\{ad, ae, bd, be\}, \text{máx}\{ad, ae, bd, be\}],$$

$$d) [a, b]/[d, e] = [\text{mín}\{a/d, a/e, b/d, b/e\}, \text{máx}\{a/d, a/e, b/d, b/e\}], \text{ con } 0 \notin [d, e].$$

Por ejemplo, sean  $[2, 5]$  y  $[1, 3]$  dos intervalos cerrados de números reales. Entonces el resultado para cada una de las operaciones antes definidas sería

$$\begin{aligned} [2, 5] + [1, 3] &= [2 + 1, 5 + 3] \\ &= [3, 8], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2, 5] - [1, 3] &= [2 - 3, 5 - 1] \\ &= [-1, 4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2, 5] \cdot [1, 3] &= [\text{mín}(2, 6, 5, 15), \text{máx}(2, 6, 5, 15)] \\ &= [2, 15], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2, 5]/[1, 3] &= [\text{mín}(2, 2/3, 5, 5/3), \text{máx}(2, 2/3, 5, 5/3)] \\ &= [2/3, 5]. \end{aligned}$$

Otro ejemplo, sean  $[0, 1]$  y  $[-6, 5]$  dos intervalos cerrados de números reales. Entonces el resultado para cada una de las operaciones antes definidas sería

$$\begin{aligned} [0, 1] + [-6, 5] &= [0 - 6, 1 + 5] \\ &= [-6, 6], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0, 1] - [-6, 5] &= [0 - 5, 1 + 6] \\ &= [-5, 7], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0, 1] \cdot [-6, 5] &= [\text{mín}(0, 0, -6, 5), \text{máx}(0, 0, -6, 5)] \\ &= [-6, 5], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0, 1]/[-6, 5] &= [\text{mín}(0, 0, 1/(-6), 1/5), \text{máx}(0, 0, 1/(-6), 1/5)] \\ &= [1/(-6), 1/5]. \end{aligned}$$

### 3.4.1 Propiedades Aritméticas

Las operaciones aritméticas en intervalos cerrados satisfacen algunas propiedades útiles que se presentarán a continuación y sus respectivas demostraciones pueden ser consultadas en [7].

**Propiedad. 3.4.1** (Conmutatividad)[7]. Sean  $A = [a_1, a_2]$  y  $B = [b_1, b_2]$  dos intervalos cerrados de números reales. Entonces,

a)  $A + B = B + A$ ,

b)  $A \cdot B = B \cdot A$ .

**Propiedad. 3.4.2** (Asociatividad)[7]. Sean  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  y  $C = [c_1, c_2]$  tres intervalos cerrados de números reales. Entonces

a)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,

b)  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

**Propiedad. 3.4.3** (Identidad)[7]. Sea  $A = [a_1, a_2]$  un intervalo cerrado de números reales y se toma como convención que el  $0 = [0, 0]$  y el  $1 = [1, 1]$ . Entonces

a)  $A = 0 + A = A + 0$ ,

b)  $A = 1 \cdot A = A \cdot 1$ .

**Propiedad. 3.4.4** (Subdistributiva)[7]. Sea  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  y  $C = [c_1, c_2]$  tres intervalos cerrados de números reales. Entonces

a)  $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$ .

**Propiedad. 3.4.5** (*Distributiva*)[7]. Sean  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  y  $C = [c_1, c_2]$  tres intervalos cerrados de números reales y para todo  $b \in B$  y  $c \in C$ ;  $b.c \geq 0$ , entonces

a)  $A.(B + C) = A.B + A.C$ ,

b) Si  $A = [a, a]$ , entonces  $a.(B + C) = a.B + a.C$ .

**Propiedad. 3.4.6** [7]. Sea  $A = [a_1, a_2]$  un intervalo cerrado de números reales. Entonces

a)  $0 \in A - A$ ,

b)  $1 \in A/A$ .

**Propiedad. 3.4.7** (*Inclusión de Monotonicidad*)[7]. Sean  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$ ,  $E = [e_1, e_2]$  y  $F = [f_1, f_2]$  dos intervalos cerrados de números reales y si  $A \subseteq E$  y  $B \subseteq F$ . Entonces

a)  $A + B \subseteq E + F$ ,

b)  $A - B \subseteq E - F$ ,

c)  $A.B \subseteq E.F$ ,

d)  $A/B \subseteq E/F$ .

## 3.5 Operaciones Aritméticas en Números Difusos

Existen dos métodos para el desarrollo de aritmética difusa; uno basado en intervalos cerrados empleando  $\alpha$  – cortes y el otro el principio de extensión de Zadeh (ver [7]). Para efectos del presente trabajo se utilizó el método basado en intervalos cerrados, debido a que es más sencillo su implementación. En esta sección se asume que los números difusos están representados por funciones de membresía continuas.

Recordemos que si  $A$  es un conjunto difuso sobre algún universo  $U$ ,  $A$  se escribe como la unión de todos sus conjuntos difusos especiales asociados a sus  $\alpha$  – *cortes*

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot {}^\alpha A.$$

**Definición. 3.5.1** Sean  $A$  y  $B$  dos números difusos sobre  $R$ , se definen las cuatro operaciones aritméticas suma, resta, producto y división, respectivamente,

$$\mathbf{a)} \quad A + B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot ({}^\alpha A + {}^\alpha B),$$

$$\mathbf{b)} \quad A - B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot ({}^\alpha A - {}^\alpha B),$$

$$\mathbf{c)} \quad A \cdot B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot ({}^\alpha A \cdot {}^\alpha B),$$

$$\mathbf{d)} \quad A/B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha ({}^\alpha A / {}^\alpha B), \quad \text{con } 0 \notin {}^\alpha B.$$

Un ejemplo del empleo de las cuatro operaciones aritméticas definidas anteriormente se presenta a continuación.

**Ejemplo. 3.5.1** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos, cuyas funciones de membresía triangulares  $\mu_A$  y  $\mu_B$ , respectivamente, se definen como

$$\mu_A(x, -1, 1, 3) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{x+1}{1+1} & -1 < x < 1, \\ \frac{3-x}{3-1} & 1 < x < 3, \\ 0 & 3 \leq x. \end{cases}$$

$$\mu_B(x, 1, 3, 5) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ \frac{x-1}{3-1} & 1 < x < 3, \\ \frac{5-x}{5-3} & 3 < x < 5, \\ 0 & 5 \leq x. \end{cases}$$

Observe que los  $\alpha$  - cortes para  $A$  y  $B$  son

$${}^{\alpha}A = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$$

$${}^{\alpha}B = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$$

Usando 3.4.1, se obtiene

$${}^{\alpha}(A + B) = [4\alpha, 8 - 4\alpha] \quad \forall x \in (0, 1]$$

$${}^{\alpha}(A - B) = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha] \quad \forall x \in (0, 1],$$

$${}^{\alpha}(A \cdot B) = \begin{cases} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15] & \forall x \in (0, 0.5], \\ [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15] & \forall x \in (0.5, 1], \end{cases}$$

$${}^{\alpha}(A/B) = \begin{cases} [(2\alpha - 1)/(2\alpha + 1), (3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)] & \forall x \in (0, 0.5], \\ [(2\alpha - 1)/(5 - 2\alpha), (3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)] & \forall x \in (0.5, 1], \end{cases}$$

El resultado de los números difusos son entonces

$$(\mu_A + \mu_B)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{4} & 0 < x < 4, \\ \frac{8-x}{4} & 4 < x < 8, \\ 0 & 8 \leq x. \end{cases}$$

$$(\mu_A - \mu_B)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -6, \\ \frac{x+6}{4} & -6 < x < -2, \\ \frac{2-x}{4} & -2 < x < 2, \\ 0 & 2 \leq x. \end{cases}$$

$$(\mu_A \cdot \mu_B)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -5, \\ \frac{[3-(4-x)^{1/2}]}{2} & -5 < x < 0, \\ \frac{(1+x)^{1/2}}{4} & 0 < x < 3, \\ \frac{[4-(1+x)^{1/2}]}{2} & 3 < x < 15, \\ 0 & 15 \leq x. \end{cases}$$

$$(\mu_A/\mu_B)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{(x+1)}{(2-2x)} & -1 < x < 0, \\ \frac{(5x+1)}{(2x+2)} & 0 < x < 1/3, \\ \frac{(3-x)}{(2x+2)} & 1/3 < x < 3, \\ 0 & 3 \leq x. \end{cases}$$

# Capítulo 4

## Diseño e Implementación

### 4.1 Introducción

El objetivo principal de este capítulo es presentar el diseño y la implementación de la herramienta gráfica difusa, describiendo de manera general cada uno de los módulos que la componen. El sistema fue desarrollado en un equipo con las siguientes características: Procesador Intel(R) Core(TM) i3 a 2.27GHz, Memoria RAM 4Gb y con un sistema operativo Windows 7 Ultimate de 64 bits Service Pack 1. El lenguaje de programación utilizado fue MATLAB R2011a (7.12.0.635); para la elaboración de diagramas de diseño fue empleado Microsoft Visio.

Para la implementación de este sistema se utilizó el entorno de programación visual de MATLAB Guide, el cual tiene las características básicas de todos los programas visuales como Visual Basic o Visual C++. Una aplicación Guide consta de dos archivos uno .m (ejecutable) y otro .fig (parte gráfica). Las dos partes están unidas a través de las subrutinas callback. Una vez que se graba los archivos desde la consola de emisión (si salvamos la .fig automáticamente lo hace el .m asociado) podemos ejecutar el programa en la ventana de comando MATLAB solamente escribiendo el nombre del archivo. El archivo .m que se crea tiene una estructura predeterminada. Consta de un encabezado y a continuación viene el código correspondiente a las siguientes subrutinas. MATLAB es

un potente lenguaje diseñado para la computación técnica. MATLAB puede ser utilizado en computación matemática, modelado y simulación, análisis y procesamiento de datos, visualización y representación de gráficos, así como para el desarrollo de algoritmos. MATLAB también es un entorno y un lenguaje de programación. Pueden definirse funciones propias y programas (archivos .m). Las funciones y los programas creados para realizar un determinado tipo de cálculos se pueden agrupar. Éste es el origen del concepto de Toolbox (caja de herramientas): una colección especializada de archivos .m diseñada para trabajar en algunos problemas específicos. Estas características mencionadas anteriormente fueron las razones por las cuales se eligió MATLAB para la realización del sistema.

## 4.2 Diseño General del Sistema

El sistema consta de tres módulos operados directamente por el usuario, que son

1. Elegir Función de Membresía,
2. Ingresar Datos de Figura,
3. Elegir Operación Aritmética.

Y dos módulos, operados por el sistema que solamente se mencionan, no se explican a profundidad ya que son parte implícita de los módulos operados por el usuario.

1. Pintar Figura,
2. Exportar Figura.

A continuación se muestra el diagrama general del sistema.

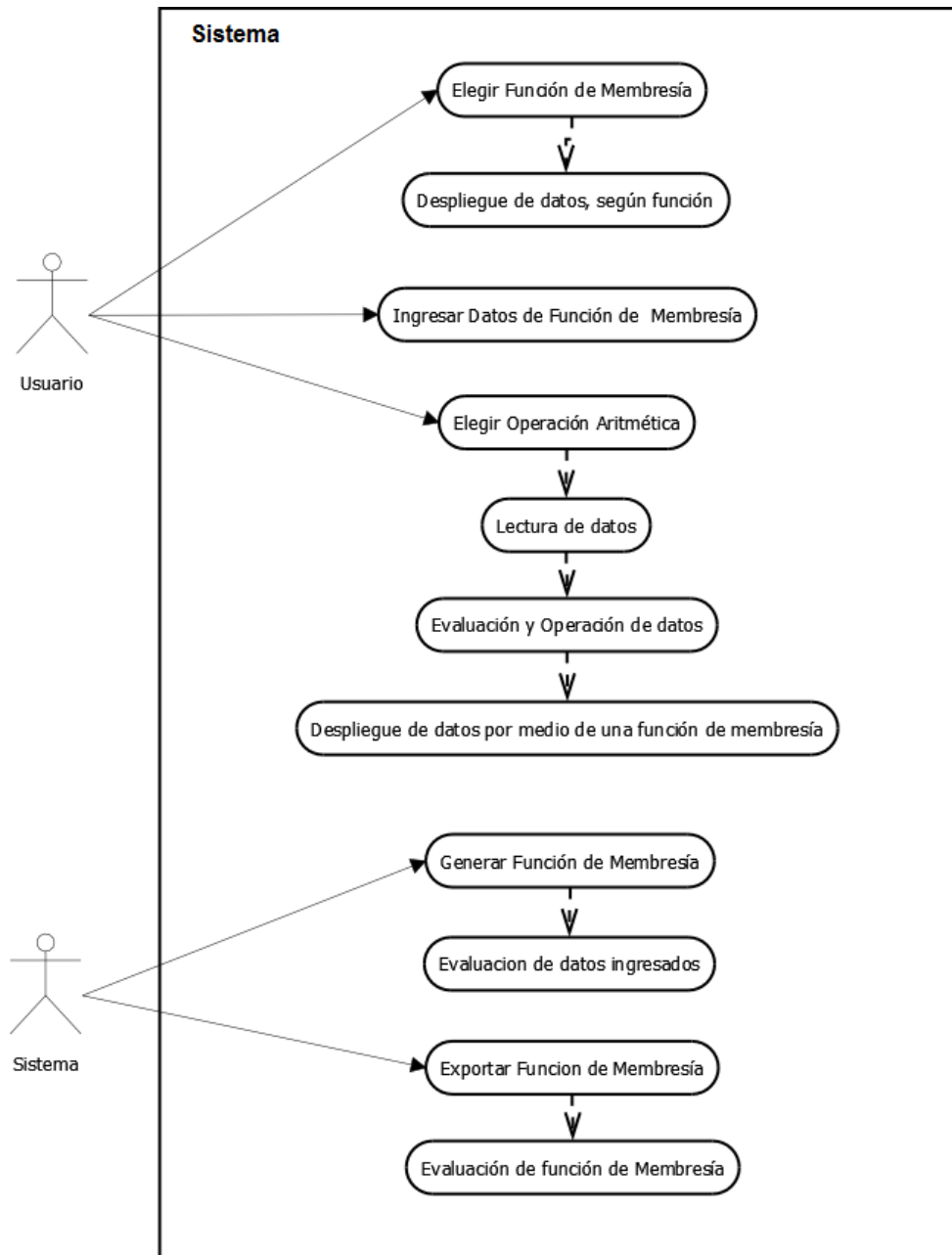


Figura 4.1: Diagrama General del Sistema.

La figura 4.1 muestra los módulos creados para el funcionamiento del sistema, mientras que la figura 4.2 se presenta el diagrama de bloques del sistema, en el cual se puede ver la forma en que se relacionan dichos módulos.

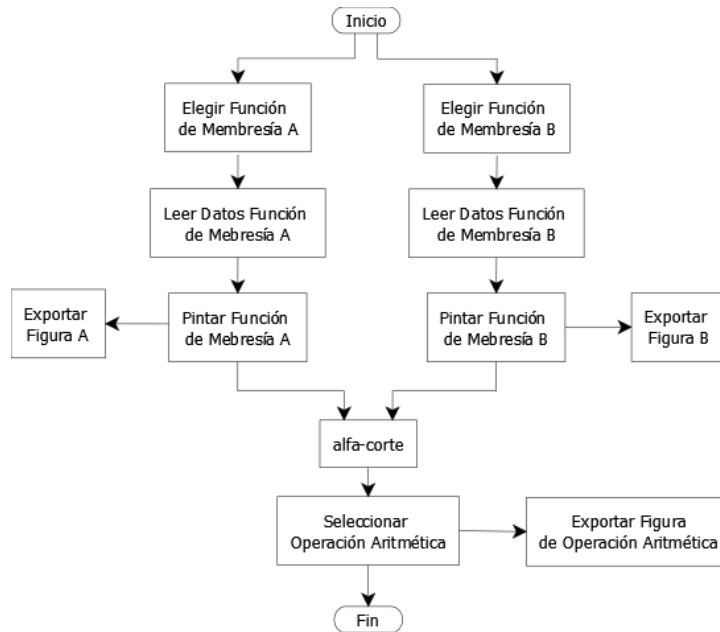


Figura 4.2: Diagrama de Bloques del sistema.

De inicio, se entrará a la elección de la función de membresía, una vez que el usuario realice la selección de dicha función, se desplegarán los datos a ingresar según la función de membresía seleccionada y si el usuario así lo decide podrá exportar la imagen a un formato .jpg. Una vez completados los datos de las dos funciones de membresía seleccionadas se procederá a ejecutar la operación aritmética que el usuario elija, así como pedir que se muestre un  $\alpha$  – corte en un intervalo definido  $[0, 1]$  y al igual que en el caso de las dos funciones de membresía elegidas anteriormente se puede exportar la gráfica obtenida de la operación aritmética.

La figura 4.3 muestra la pantalla de inicio del sistema.

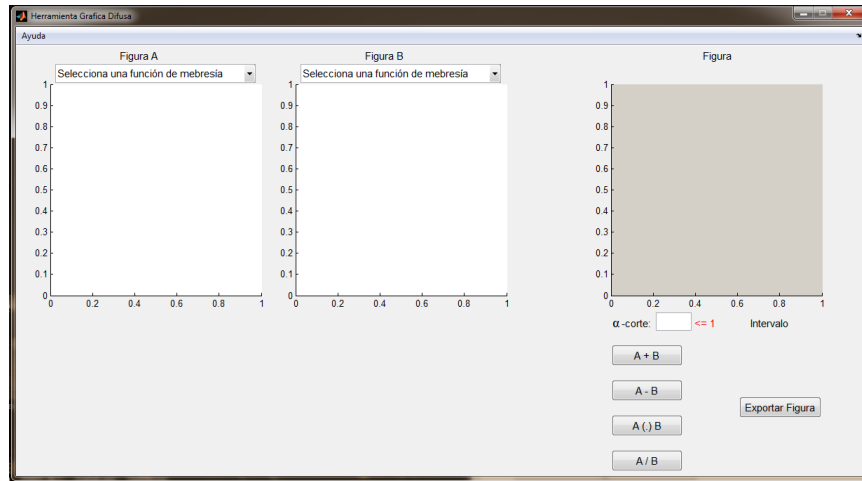


Figura 4.3: Pantalla del Sistema.

A continuación se describen cada uno de los módulos del sistema.

#### 4.2.1 Módulo I. Elegir Función de Membresía.

Este módulo está dedicado a las funciones de membresía descritas en el capítulo 2. La figura 4.4 muestra el esquema general de este módulo.

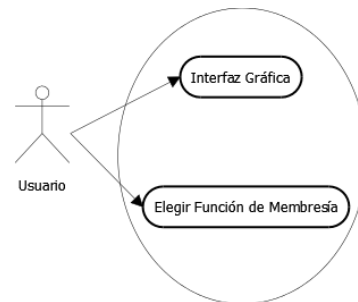


Figura 4.4: Módulo Funciones Membresía.

La función principal de este módulo es la elección de las funciones de membresía a operar de forma aritmética. Primero se entrará a la elección de la función de membresía mediante un Popup Menú (ver figura 4.5), una vez que el usuario realice la selección de

dicha función, se desplegará los datos necesarios según la función de membresía seleccionada y se deberá de completar estos mismos.

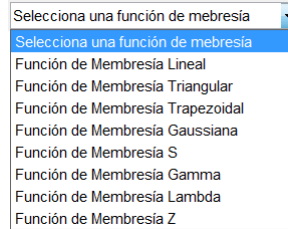


Figura 4.5: Menú de Funciones Membresía.

El objeto Popup Menú generalmente proporciona al usuario una corta lista de opciones seleccionables que puede hacer click para realizar acciones. Sólo un elemento de la lista se puede seleccionar en cualquier momento dado. Estos menús son compactos controles GUI en términos de área real de ventanas y sólo requiere el espacio de una sola línea de cadena de texto. La propiedad Value puede ser utilizado para determinar qué elemento emergente ha seleccionado y una instrucción switch/case puede ser utilizado para canalizar las acciones del elemento, tal y como se utilizó en este sistema.

En MATLAB, no es necesario declarar específicamente una variable, ya que éste las declara de forma dinámica, sin embargo, para el planteamiento de esta implementación se requiere hacer uso de una variable global la cual hará la selección del menú de opciones de las funciones de membresía y esta se realiza por medio de la instrucción switch.

## 4.2.2 Módulo II. Ingresar Datos de Función de Membresía.

En este módulo esta encargado de desplegar los datos necesarios para cada función de membresía que el usuario seleccione en el módulo I. Dentro de las funciones internas, deberá leer y validar todos los datos ingresados por el usuario, y en caso existan datos erróneos, se muestra un mensaje de error al usuario. Observe que en la figura 4.6, la función principal del módulo es obtener los datos ingresados y validarlos.

Una vez que haya realizado la selección de la función de membresía (figura 4.5) se mostrarán los datos necesarios para dicha función y sus respectivas condiciones iniciales,

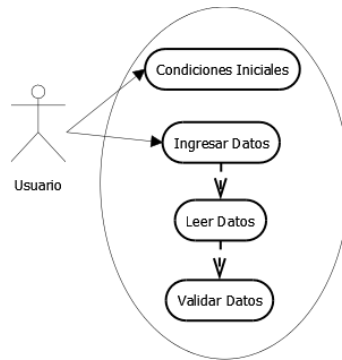


Figura 4.6: Módulo Ingresar Datos de Función de Membresía.

como en la figura 4.7 (Para esta figura en particular  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  pertenecen a una función de membresía trapezoidal y  $m_2$ ,  $k_2$  a una función de membresía gaussiana). El sistema despliega las variables necesarias utilizando Static Text para mostrar el nombre de la variable solicitada (figura 4.7 Condición,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $m_2$  y  $k_2$ ) y Edit Text para capturar el valor de las variables (figura 4.7 los rectangulos blancos). La captura de estos datos se realiza mediante los objetos Edit Text, una vez echo esto se da click en el botón Pintar Figura A o Pintar Figura B, dependiendo de la figura elejida en ese momento, y el sistema dibuja la función solicitada por el usuario.

Figura 4.7: Ingresar Datos de Funciones de Membresía A y B.

Los Edit Text, son los controles de interfaz gráfica de usuario que permiten al usuario la entrada de cadenas de texto o valores numéricos en una aplicación. La propiedad String del objeto Uicontrol Static Text tiene una cadena de texto y puede ser obtenida mediante el uso de la función `get()`. Por defecto, el número de líneas de entrada de un Edit Text es de una sola línea. Se puede utilizar las propiedades Min y Max para permitir varias entradas de línea mediante el establecimiento de los valores de Max-Min a ser mayor que uno. Los objetos más simples IUControl es el Static Text y generalmente se utiliza para etiquetar otros objetos IUControl en una aplicación de interfaz gráfica de usuario.

Los controles de Static Text no son realmente los controles, en el sentido de que su función callback no podrá ser invocada. Las etiquetas Static Text son similares a los Edit Text en que la propiedad String controla el contenido de texto y propiedades tales como HorizontalAlignment, FontSize FontName, etc .. controlar el aspecto visual.

Los botones fueron implementados mediante los objetos Push Button, éstos con un simple click en ellos inicia una acción y no mantiene su estado. Los ejemplos más comunes de los controles de botón son Aceptar y Cancelar que aparecen en los cuadros de diálogo emergentes en muchas aplicaciones de interfaz gráfica de usuario. La configuración de estos controles es muy sencilla.

### 4.2.3 Módulo III. Seleccionar Operación Aritmética.

La función principal de este módulo es la operación aritmética de los dos números difusos elegidos en el módulo I. En la figura 4.8 se muestra el diseño general del módulo.

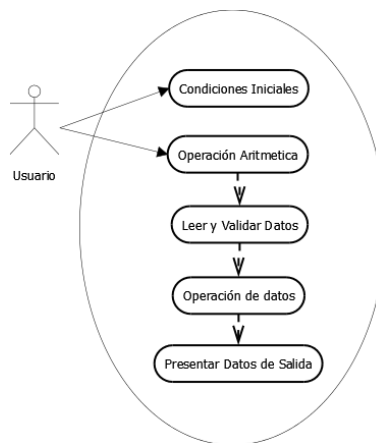


Figura 4.8: Módulo Seleccionar Operación Aritmética.

Este módulo permite operar aritméticamente dos números difusos con algunas de las opciones disponibles como la suma, resta, producto y división, también el usuario prodrá proporcionar un  $\alpha - corte$  que cumpla la condición  $0 \leq \alpha - corte \leq 1$  y poder exportar en formato .jpg la gráfica que se obtenga de la operación, ver figura 4.9.

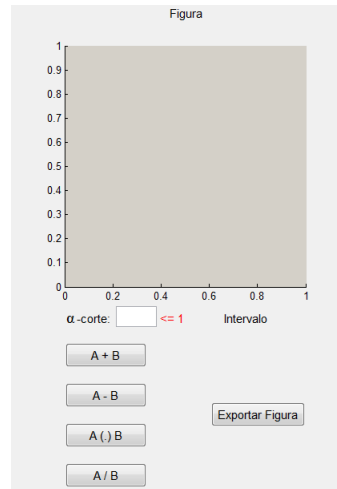


Figura 4.9: Seleccionar Operación Aritmética.

Para ejecutar este módulo el usuario deberá hacer click en cualquiera de los botones disponibles como la suma, resta, producto y división, en caso que el usuario seleccione algún tipo de operación antes de tener la Figura A y Figura B, el sistema mostrará un mensaje de error al usuario, para que este sea corregido; también se puede elegir pintar un  $\alpha - corte$  dentro de un intervalo  $[0, 1]$ . Si el usuario no ingresa ningún  $\alpha - corte$  el sistema tomará como  $\alpha - corte = 0$  y mostrará el intervalo correspondiente a este valor, pero si se ingresa un dato que no cumpla la condición se notificará al usuario mediante un mensaje de error. En la figura 4.9 podemos apreciar que también existe un botón de exportar, con el cual podemos guardar la gráfica en un formato .jpg.

# Capítulo 5

## Pruebas y Resultados

### 5.1 Introducción

En este capítulo se muestran las pruebas efectuadas por la herramienta gráfica. De forma externa se presentan las pruebas mediante algunas figuras que describen el funcionamiento de dicho sistema.

### 5.2 Pruebas

Las pruebas realizadas sobre la herramienta gráfica difusa consistieron en elegir algunos de los distintos tipos de números difusos que ofrece el sistema y después operarlos aritméticamente mediante una suma, resta, producto o división. De igual forma exportar cada uno de los números difusos elegidos o el derivado de sus operaciones. Primero se analizó el código del sistema derivado de la parte teórica del capítulo 3 y después se aplicaron cada uno de estos conceptos a las opciones de números difusos con los que cuenta el sistema. Se utilizaron datos propuestos en algunos libros para realizar las pruebas de las operaciones aritméticas y comparar los resultados obtenidos del sistema con los de la bibliografía [7].

La siguiente secuencia de imágenes muestra la funcionalidad de la Herramienta Gráfica

Difusa y como responde a una operación arimética con las 4 opciones disponibles en el sistema.

En la figura 5.1 se muestra la interfaz de usuario que se desarrolló, la cual opera aritméticamente los dos números que el usuario haya elegido y muestra el resultado de dicha operación.

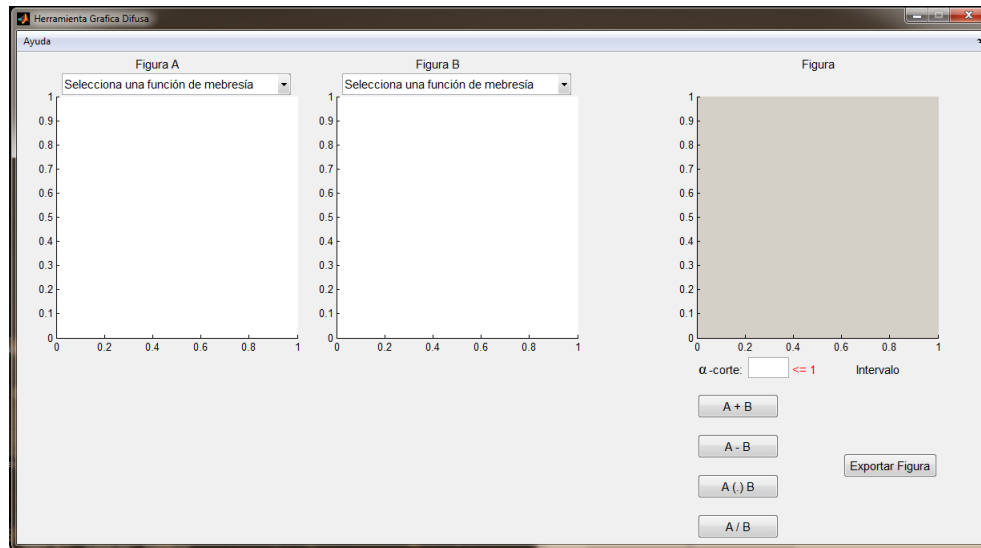


Figura 5.1: Interfaz Gráfica de Herramienta Difusa.

Esta interfaz se divide en 6 partes principales que son:

- Sección de función de membresía
- Sección de ingresar datos de función de membresía
- Sección de gráfica de función de membresía
- Sección  $\alpha - corte$
- Sección de operaciones aritméticas
- Sección de respuesta gráfica

La figura 5.2 muestra el funcionamiento de la elección de función de membresía A. En este ejemplo se eligió una función de membresía triangular, después de ello debemos ingresar los datos de cada variable desplegada de acuerdo a las condiciones iniciales mostradas en color rojo.

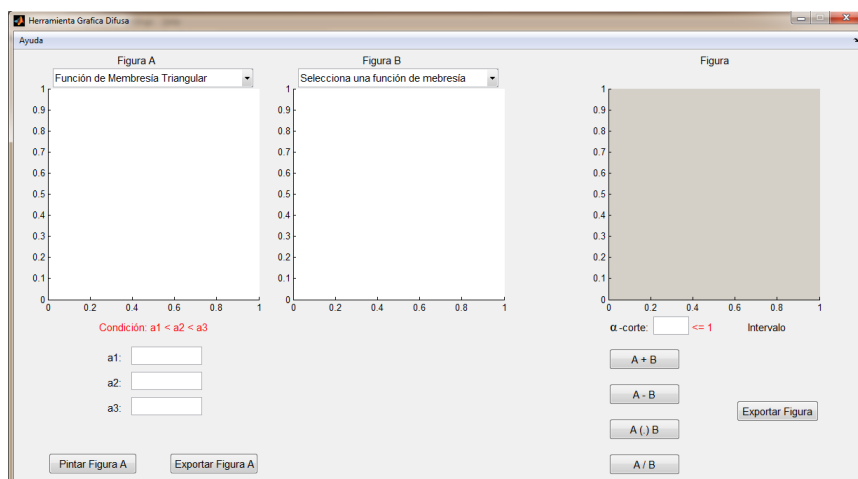


Figura 5.2: Selecciona Función de Membresía A.

En caso, el usuario haga un click en el botón Pintar Figura A y aun no haya ingresado al menos un o los tres datos o ingrese alguna letra se desplegará un mensaje de error como el apreciado en la figura 5.3.

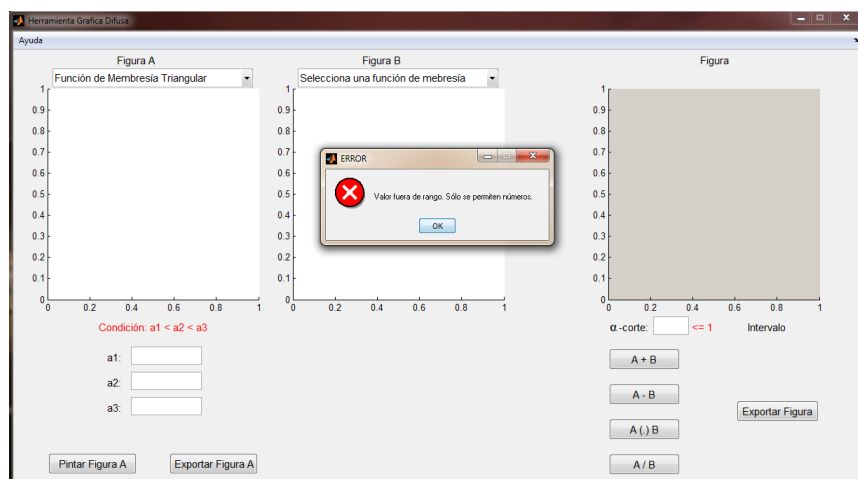


Figura 5.3: Mensaje Error si falta al menos uno o los tres datos solicitados.

Otro error que podría cometer el usuario, es no respetar las condiciones iniciales, como ya mencionamos anteriormente están desplegadas por letras color rojas, la figura 5.4 muestra el mensaje de error que se desplegará.

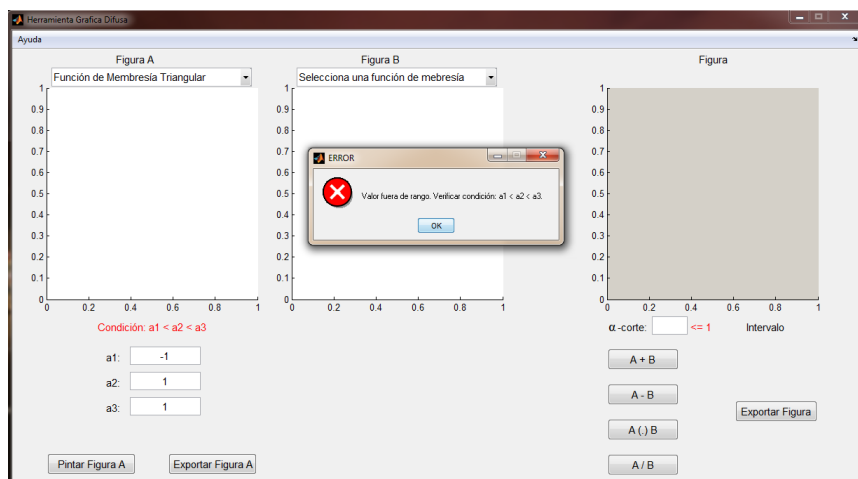


Figura 5.4: Mensaje Error si no cumple con las condiciones iniciales.

Finalmente si el usuario realiza un click en el botón Exportar Figura A sin antes haber pintado satisfactoriamente dicha figura, el sistema desplegará un error, como el presentado en la figura 5.5.

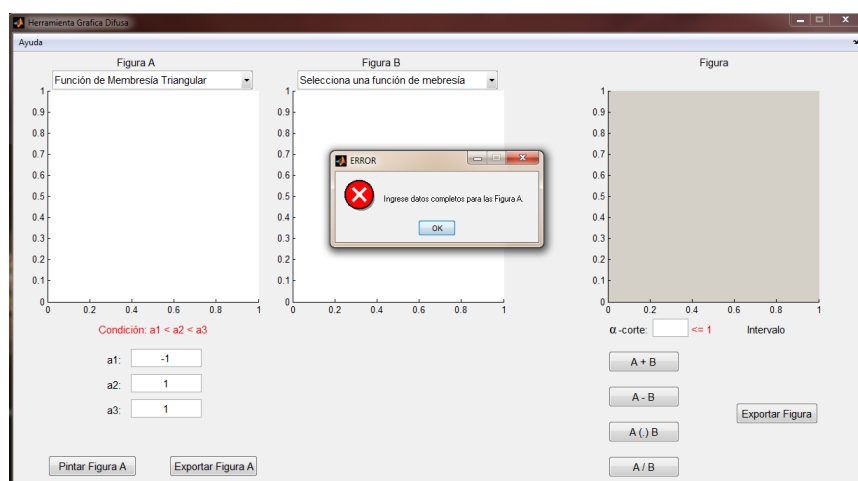


Figura 5.5: Mensaje Error si exporta sin haber pintado satisfactoriamente la figura A.

En la figura 5.6 podemos apreciar los datos que se introdujeron para cada variable y una vez completados se debe hacer click en el botón Pintar Figura A.

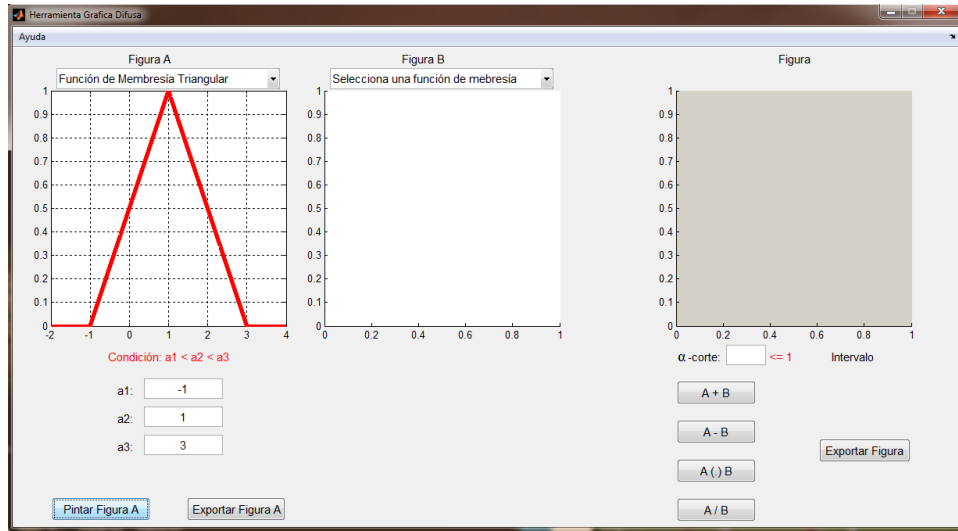


Figura 5.6: Ingresar Datos y Pintar Función de Membresía A.

La figura 5.7 es el escenario que presenta el sistema al hacer click en el botón Exportar Figura A, se mostrará otra ventana en la que el usuario podrá elegir ubicación y nombre de la figura que este exportando.

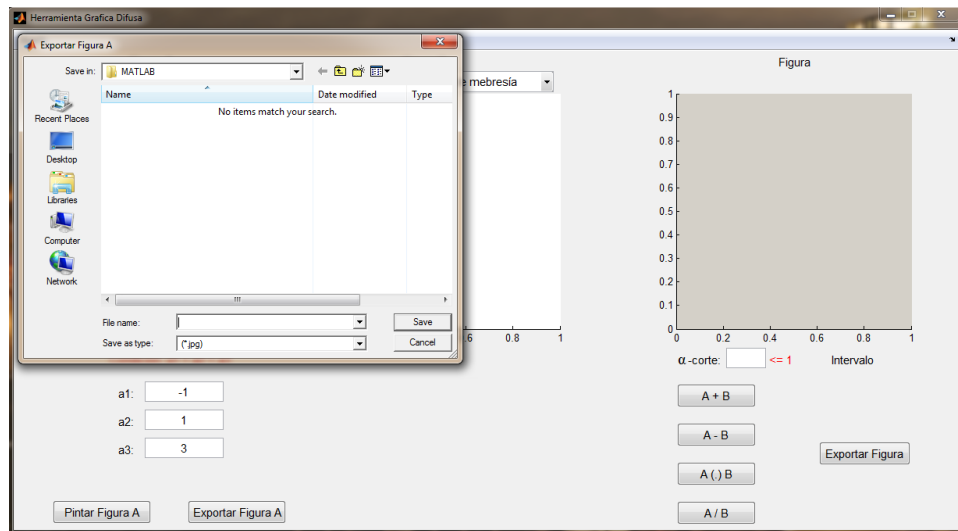


Figura 5.7: Exportar Función de Membresía A.

Al igual que en la Figura A, en la Figura B se necesitan realizar los mismos paso. Primero, elegir la función de membresía como en la figura 5.8 y después ingresar los datos necesarios según la función (ver figura 5.9).

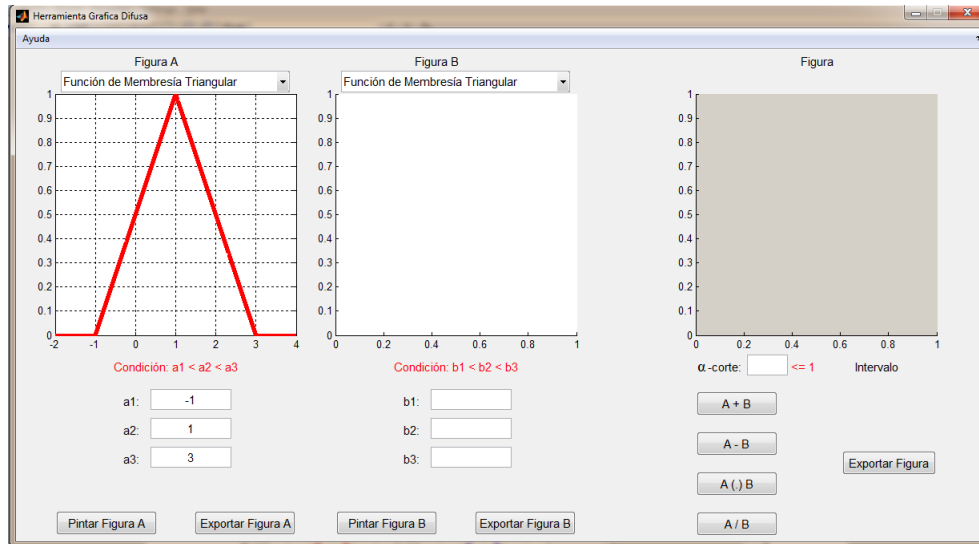


Figura 5.8: Selecciona Función de Membresía B.

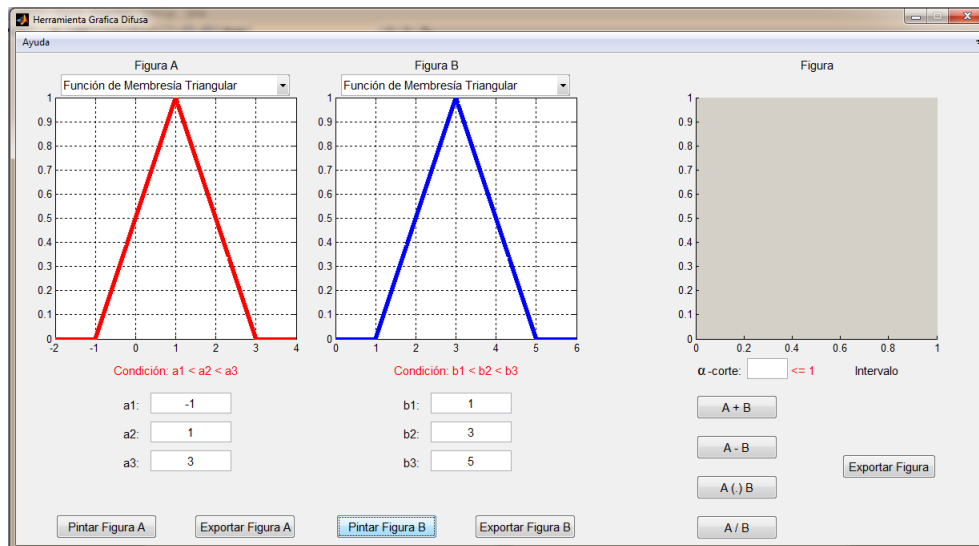


Figura 5.9: Ingresar Datos y Pintar Función de Membresía B.

La figura 5.10 muestra el ingreso de un valor  $\alpha$ -corte = 0.5, esta opción le permitirá al

usuario conocer el intervalo en el plano de las  $x$  correspondiente al  $\alpha$ -corte proporcionado. La condición inicial es  $0 \leq \alpha - corte \leq 1$ .

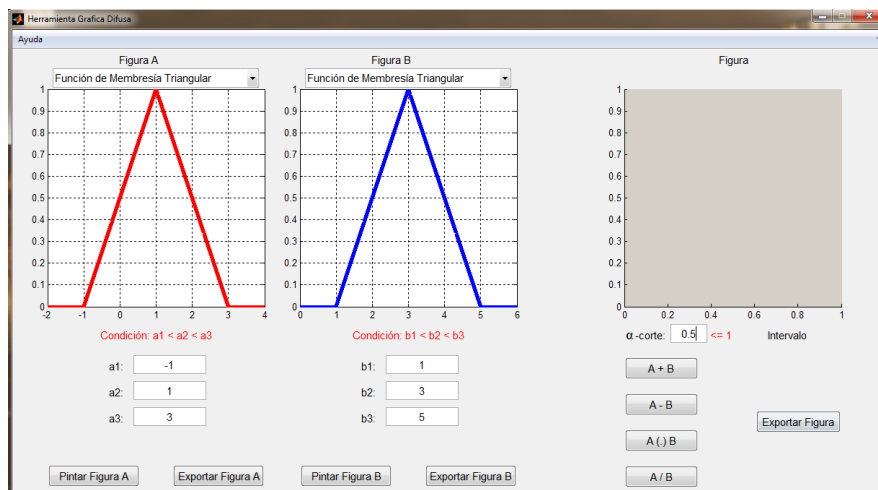


Figura 5.10: Ingreso  $\alpha - corte = 0.5$ .

En caso no cumpla esta condición y de click en cualesquiera de las opciones aritméticas se mostrará un mensaje de error como en la figura 5.11. Cabe mencionar que esta opción del sistema no es dato obligatorio, ya que si el usuario no ingresa un valor para el  $\alpha$ -corte el sistema tomará como un valor 0 y en el intervalo que se proporciones será el correspondiente a este valor 0.

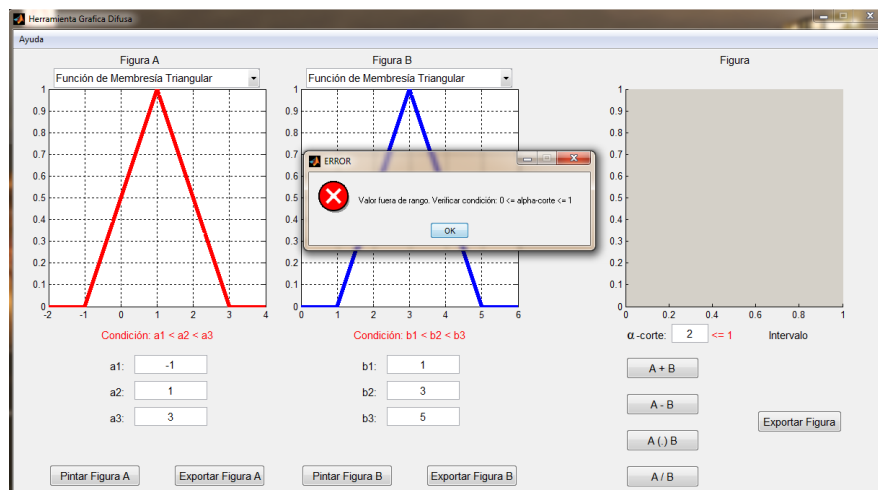


Figura 5.11: Mensaje de error  $\alpha - corte$  no cumple condición inicial.

En la figura 5.12 se dio click en el botón  $A + B$  el cual realiza la suma de las figuras A y B proporcionadas anteriormente y se ingreso un  $\alpha - corte = 0.5$ . La suma de las dos figuras esta pintada por color negro y el  $\alpha - corte$  es la línea en color rojo. Además el sistema proporciona el intervalo según el  $alpha - corte$  y se observa en la figura 5.12 justo debajo de la gráfica del costado derecho.

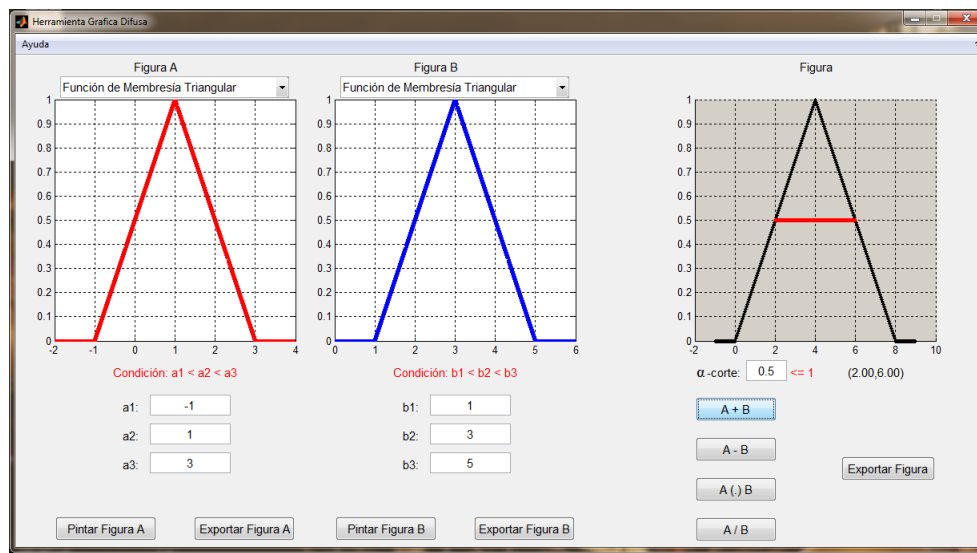


Figura 5.12: Suma de la Figura A más Figura B, con  $\alpha - corte = 0.5$ .

Las figuras 5.13, 5.14 y 5.15 muestra la resta, producto y división respectivamente, con el mismo  $alpha - corte = 0.5$  para cada operación.

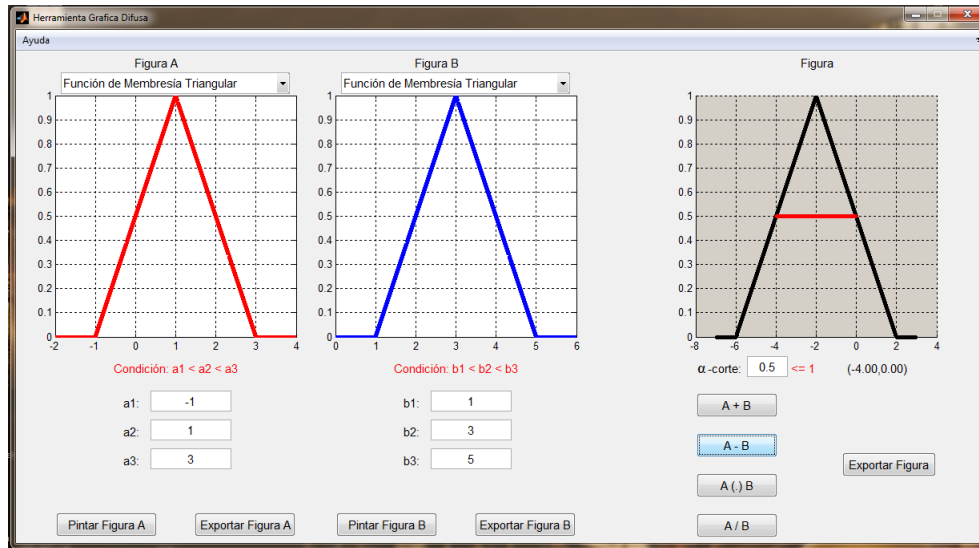


Figura 5.13: Resta de la Figura A menos Figura B, con  $\alpha - corte = 0.5$ .

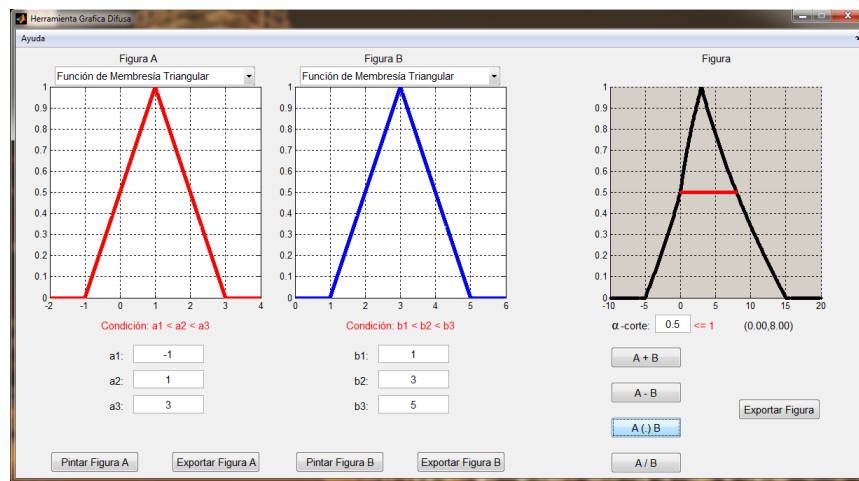


Figura 5.14: Producto de la Figura A y Figura B, con  $\alpha - corte = 0.5$ .

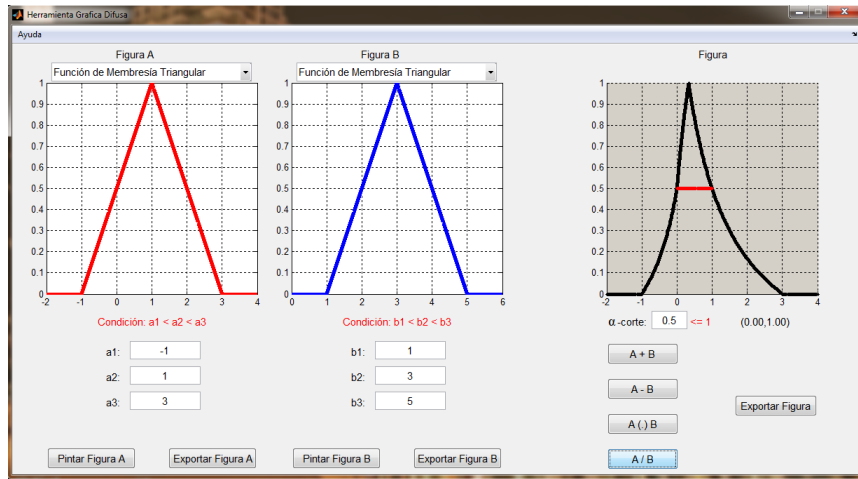


Figura 5.15: División de la Figura A entre Figura B, con  $\alpha$  – corte = 0.5.

En el caso de que el usuario realice un click en cualquier de las operaciones aritméticas con que cuenta el sistema y no ha generado de manera satisfactoria la Figura A y/o Figura B el sistema informará que figura hace falta generar para poder realizar la operación. Por ejemplo, en la figura 5.16 sólo se ha generado la Figura A y se da click en el botón suma por lo cual se despliega el mensaje que se observa en la figura.

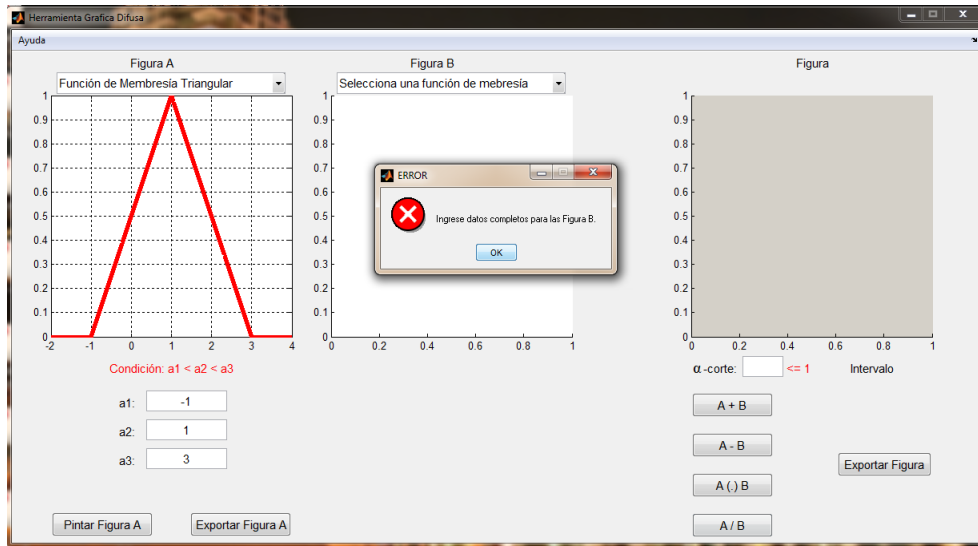


Figura 5.16: Mensaje de error, si hace click en algún botón de las operaciones aritméticas sin haber generado la Figura B satisfactoriamente.

### 5.3 Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos del sistema y se comparan con los planteados en la bibliografía [7].

Las funciones de membresía utilizadas para cada operación aritmética fueron funciones de membresía triangulares definidas como  $\mu_A(x, -1, 1, 3)$  y  $\mu_B(x, 1, 3, 5)$ .

En la figura 5.17 y 5.18 se presenta la suma de  $\mu_A + \mu_B$ .

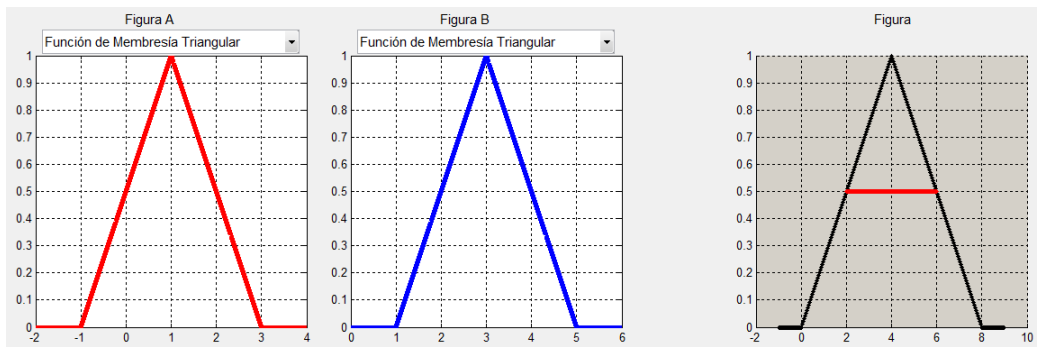


Figura 5.17: Resultado de la suma.

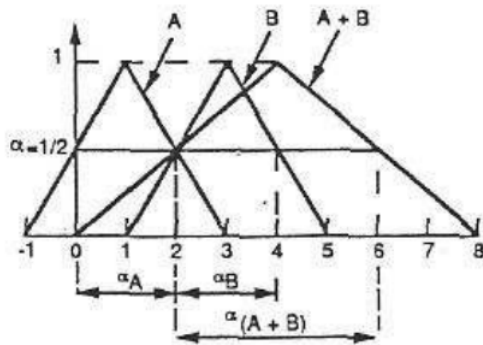


Figura 5.18: Resultado de la suma en bibliografía [7].

Como se aprecia en las figuras anteriores, el resultado de la suma es  $\mu_{A+B}(x, 0, 4, 8)$ .

En las figuras 5.19 y 5.20 se realiza una resta.

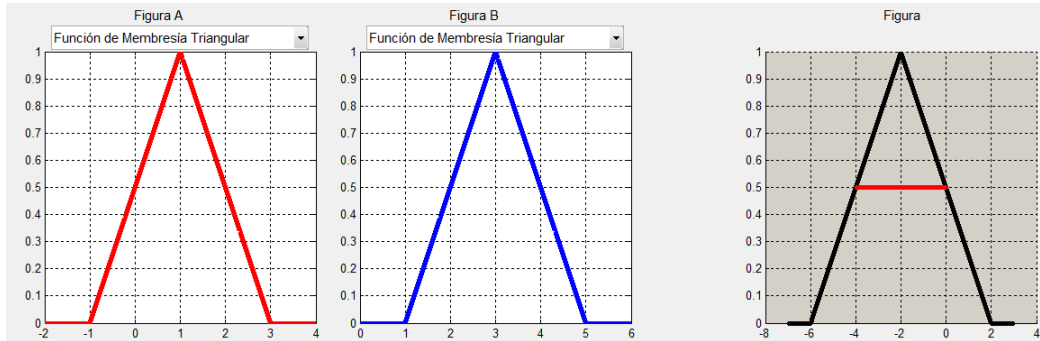


Figura 5.19: Resultado de la resta.

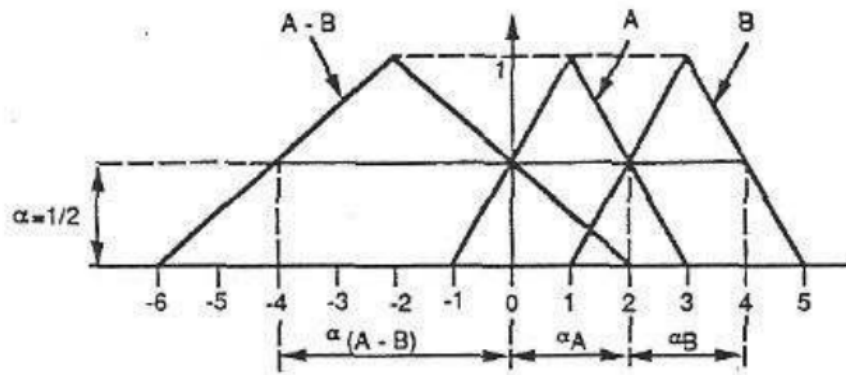


Figura 5.20: Resultado de la resta en bibliografía [7].

El resultado de la resta es  $\mu_{A-B}(x, -6, -2, 2)$ .

Las figuras 5.21 y 5.22 muestran el producto y el resultado fue  $\mu_{A \cdot B}(x, -5, 3, 15)$ . Observe que el resultado de las gráficas son los mismos, en la figura 5.21 puede ver que el intervalo del  $\alpha$  - corte = 0.5 es (0, 8) y este es igual al de la figura 5.22.

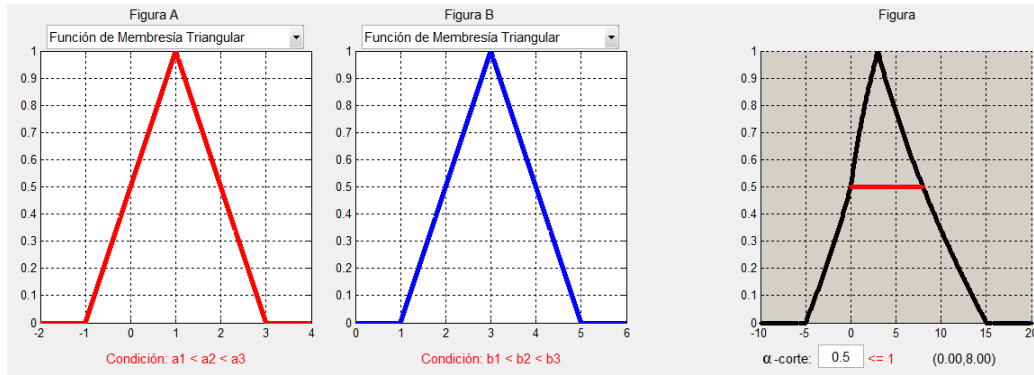


Figura 5.21: Resultado del producto.

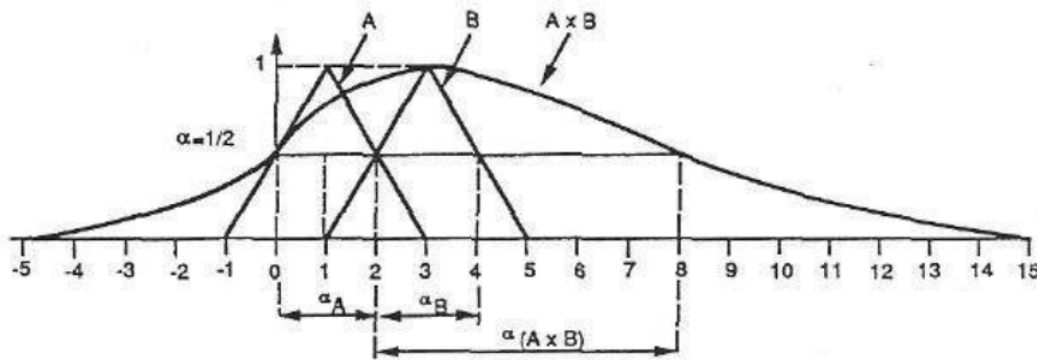


Figura 5.22: Resultado del producto en bibliografía [7].

En las siguientes figuras podemos apreciar, el resultado de la división y se obtiene  $\mu_{A/B}(x, -1, 0.5, 3)$ .

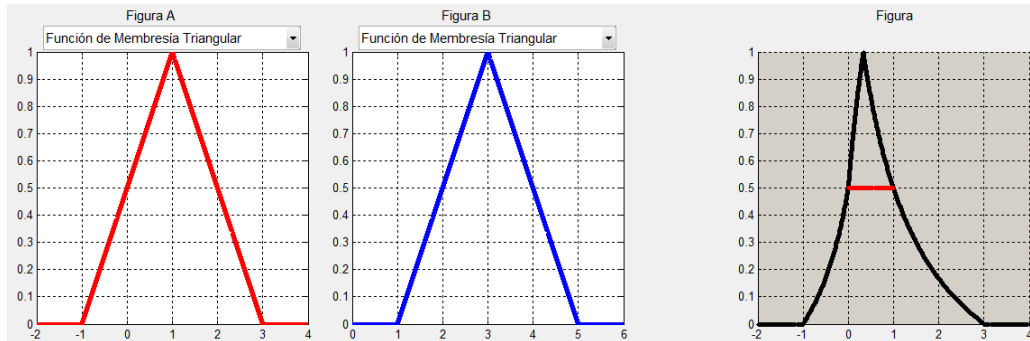


Figura 5.23: Resultado de la división.

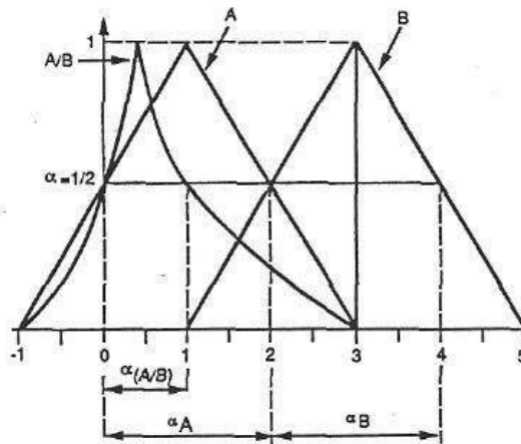


Figura 5.24: Resultado de la división en bibliografía [7].

Como se ha visto en las figuras anteriores los resultados que se obtuvieron por el sistema y los propuestos en la bibliografía [7], son los mismos.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajos Futuros

### 6.1 Introducción

En esta Tesis se ha presentado una metodología de análisis y diseño completamente general para la operación aritmética de números difusos en intervalos cerrados, así como el software desarrollado para su implementación. La metodología está basada en tres pasos, los cuales fueron estudiados y presentados a lo largo de todos los capítulos que conforman este trabajo: 1) Definición de conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos, 2) la definición de números difusos, propiedades y construcción mediante  $\alpha$  – *cortes* y 3) la operación aritmética de los números difusos. Este capítulo tiene como objetivo presentar conclusiones derivadas del trabajo de investigación para el desarrollo de esta Tesis, así también como algunos Trabajos a Futuro que podrían mejorar el sistema.

### 6.2 Conclusiones

Uno de los aspectos más importantes que se perciben en el trabajo con lógica difusa, es la importancia de replantear los conceptos clásicos de verdad y falsedad, y pertenencia y no-pertenencia, para involucrar en nuestras concepciones, de una manera formal, el concepto

difuso o impreciso.

La lógica difusa nos permite entender y manipular matemáticamente conceptos que son a la vez parcialmente verdaderos y parcialmente falsos, en la mayoría de las veces, o conceptos que no están definidos de manera precisa en el lenguaje y trabajo habitual (tales como alto, frío, etc). Permite asignar valores de verdad a las proposiciones, en el intervalo unitario, y operar matemáticamente con ellos. Estos aspectos, simples en apariencia, abren nuevas perspectivas sobre conceptos aparentemente conocidos o dominados basados en la lógica y teoría de conjuntos clásicos.

En este trabajo se estudiaron temas relativos a las operaciones con conjuntos, números e intervalos difusos. Se examinaron algunas funciones de membresía, que aunque no abarcan la totalidad de las funciones que se pueden encontrar, son las más importantes desde un punto de vista teórico.

Los objetivos de este trabajo de tesis fueron cubierto es en su totalidad, prueba de ello es el sistema obtenido, que permite la manipulación gráfica de los números difusos, de manera amigable, sencilla y muy confiable. Con el desarrollo de este trabajo podemos concluir que

- Se obtuvo el conocimiento necesario acerca de la Lógica Difusa.
- Se llegó a un profundo análisis de los Números Difusos, parte central de este trabajo.
- Se hizo un trabajo aritmético sobre los números difusos para su implementación gráfica, y se obtuvo la información necesaria para poder realizar el sistema.
- Se implemento una Herramienta Gráfica Difusa propia, gracias a la documentación obtenida durante el trabajo de investigación, quedando como resultado un herramienta fiable y útil.
- Se creo una interfaz gráfica amigable para usuarios que cuenten con conocimientos minimos del tema de Números Difusos, puedan operar el sistema.

Atendiendo al estudio y la revisión de la investigación presentada en los capítulos anteriores, mi perspectiva es que lógica difusa se ha ganado el reconocimiento del que

goza en la actualidad en base a sus excelentes resultados que ha cosechado, en cualquiera de los campos de aplicación que se utilice. Gran parte de este reconocimiento se debe al hecho de que la lógica difusa es capaz de generar respuestas a una situación basándose en el conocimiento adquirido de esta, aunque este sea inexacto o incompleto, tomando como base la imprecisión del conocimiento humano, pero eso sí, bajo un planteamiento matemático.

Cabe mencionar que la documentación de este trabajo puede ayudar a introducir a toda persona interesada en esta área.

### 6.3 Trabajos Futuros

Si bien el proyecto resultó muy funcional, existen líneas de investigación y desarrollo que se pueden aplicar en un futuro a este proyecto. Se propone como trabajo futuro:

- Implementar una herramienta que no limite las funciones de membresía, que el propio usuario pueda proporcionar su función, siempre y cuando cumpla con las restricciones de dichas funciones.
- Implementar un módulo con las operaciones básicas difusas: intersección, unión y complemento.
- Incluir fuzzificación, el cual es el proceso realizado para convertir un valor tradicional lógico, binario, decimal, y/o exacto, en un valor o cantidad difusa. También incluir el proceso de inferencia para evaluar las normas, dado un conjunto de reglas (instrucciones SI... ENTONCES) se deben permitir determinar un resultado. Incluidos los dos procesos anteriores se podría llevar a cabo la solución de algunos problemas reales en la toma de decisiones.

# Apéndice A

## Implementación de las Funciones de Membresía en Sistema

Este apéndice contiene la implementación de las funciones de membresía en el sistema.

### A.1 Funciones de membresía

A continuación se muestra el código fuente que fué utilizado para el cálculo de cada parámetro de las funciones de membresía en el desarrollo del sistema.

Una vez que se haya realizado la elección de las funciones de membresía a operar e ingresando los datos correspondientes solicitados por el sistema. Al seleccionar alguna de las operaciones aritméticas disponibles, haciendo click en el botón correspondiente, se realizarán los siguientes cálculos (según las dos funciones de membresías elegidas).

Para las funciones de membresía lineales, es

```
function [vec1,vec2]=Lineal(a1,a2,limiteax,alphac);
    alpha = 0:0.01:1;
    Alx = a1+((a2-a1)*alpha);
    Arx = limiteax;
    acAlx = a1+((a2-a1)*alphac);
    acArx = limiteax;
    vec1=Alx;
    vec2=[Arx,acAlx;acArx];
end
```

Para las funciones de membresía triangulares, se define

```
function [vec1,vec2]=Triangular(a1,a2,a3,alphac);
    alpha = 0:0.01:1;
    Alx = a1+((a2-a1)*alpha);
    Arx = a3-((a3-a2)*alpha);
    acAlx = a1+((a2-a1)*alphac);
    acArx = a3-((a3-a2)*alphac);
    vec1=[Alx;Arx];
    vec2=[acAlx;acArx];
end
```

Para las funciones de membresía trapezoidal, es

```
function [vec1,vec2]=Trapezoidal(a1,a2,a3,a4,alphac);
    alpha = 0:0.01:1;
    Alx = a1+((a2-a1)*alpha);
    Arx = a4-((a4-a3)*alpha);
    acAlx = a1+((a2-a1)*alphac);
    acArx = a4-((a4-a3)*alphac);
    vec1=[Alx;Arx];
```

```

    vec2=[acAlx;acArx];
end

```

Para las funciones de membresía gaussiana, se define

```

function [vec1,vec2]=Gaussiana(m1,k1,alphac)
    alpha = 0:0.01:1;
    da1=(-4*((log(alpha))/k1));
    Alx = m1-(sqrt(da1))/2;
    Arx = m1+(sqrt(da1))/2;
    if(alphac==0)
        acda1=0;
    else
        acda1=(-4*((log(alphac))/k1));
    end
    acAlx = m1-(sqrt(acda1))/2;
    acArx = m1+(sqrt(acda1))/2;
    vec1=[Alx;Arx];
    vec2=[acAlx;acArx];
end

```

Para las funciones de membresía  $S$ , es

```

function [vec1,vec2]=S(a1,a2,alphac)
    alpha = 0:0.01:1;
    da1 = (2 * ((a2 - a1)^2)) * alpha;
    da2 = 2 * ((a2 - a1)^2) - ((2 * ((a2 - a1)^2)) * alpha);
    Alx = (a1 + (sqrt(da1))/2). * (alpha <= 0.5) + (a2 - (sqrt(da2))/2). * ((alpha >
0.5)&(alpha <= 1));
    Arx = a2;
    if alphac=0.5
        acda1 = (2 * ((a2 - a1)^2)) * alphac;
        acAlx=(a1+(sqrt(acda1))/2);
    end

```

```

else
     $acda2 = 2 * ((a2 - a1)^2) - ((2 * ((a2 - a1)^2)) * alphac);$ 
     $acAlx = (a2 - \sqrt{acda2})/2;$ 
end
acArx = a2;
vec1=Alx;
vec2=[Arx;acAlx;acArx];
end

```

Para las funciones de membresía Gamma, se define

```

function [vec1,vec2]=Gamma(a1,k1,limiteax,alphac)
alpha = 0:0.01:1;
 $da1 = (4 * \alpha) ./ (k1 - (\alpha * k1));$ 
Alx = a1 + (\sqrt{da1})/2;
Arx = limiteax;
 $acda1 = (4 * alphac) ./ (k1 - (\alphac * k1));$ 
acAlx = a1 + (\sqrt{acda1})/2;
acArx = limiteax;
vec1=Alx;
vec2=[Arx;acAlx;acArx];
end

```

Para las funciones de membresía Lamda, se define

```

function [vec1,vec2]=Lambda(a1,a2,alphac)
alpha = 0:0.01:1;
Alx = a1;
Arx = a2 - ((a2 - a1) * alpha);
acAlx = a1;
acArx = a2 - ((a2 - a1) * alphac);
vec1=Arx;
vec2=[Alx;acAlx;acArx];

```

end

Para las funciones de membresía  $Z$ , se define

```
function [vec1,vec2]=Z(a1,a2,alphac)
    alpha = 0:0.01:1;
    da1 = 2 * ((a2 - a1)^2) - ((2 * ((a2 - a1)^2)) * alpha);
    da2 = (2 * ((a2 - a1)^2)) * alpha;
    Alx=a1;
    Arx = (a1 + (sqrt(da1))/2) .* (alpha >= 0.5) + (a2 - (sqrt(da2))/2) .* ((alpha >=
0)&(alpha < 0.5));
    if alphac_i=0.5
        acda1 = 2 * ((a2 - a1)^2) - ((2 * ((a2 - a1)^2)) * alphac);
        acArx=(a1+(sqrt(acda1))/2);
    else
        acda2 = (2 * ((a2 - a1)^2)) * alphac;
        acArx=(a2-(sqrt(acda2))/2);
    end
    acAlx = a1;
    vec1=Arx;
    vec2=[Alx;acAlx;acArx];
end
```

A continuación se muestra como se procesan los datos para llevar acabo cada una de las cuatro operaciones aritméticas.

### A.1.1 Suma

Para cualquiera de los números difusos que se elijan para operar, la suma esta dada por

$$sumalx = Alx + Blx;$$

$$sumarx = Arx + Brx;$$

Y para calcular los  $\alpha$  – cortes

$$acsumalx = acAx + acBx;$$

$$acsumarx = acAy + acBy;$$

### A.1.2 Resta

Para cualquiera de los números difusos que se elijan para operar, la resta está dada por

$$restalx = Alx - Brx;$$

$$restarx = Arx - Blx;$$

Y para calcular los  $\alpha$  – cortes

$$acrestalx = acAlx - acBrx;$$

$$acrestarx = axArx - axBlx;$$

### A.1.3 Producto

Para cualquiera de los números difusos que se elijan para operar, el producto está dada por

$$productolx = [\min(Alx \cdot Blx, Alx \cdot Brx, Arx \cdot Blx, Arx \cdot Brx)];$$

$$productorx = [\max(Alx \cdot Blx, Alx \cdot Brx, Arx \cdot Blx, Arx \cdot Brx)];$$

Y para calcular los  $\alpha$  – cortes

$$acproductolx = [\min(acAlx \cdot acBlx, acAlx \cdot acBrx, acArx \cdot acBlx, acArx \cdot acBrx)];$$

$$acproductorx = [\max(acAlx \cdot acBlx, acAlx \cdot acBrx, acArx \cdot acBlx, acArx \cdot acBrx)];$$

#### A.1.4 División

Para cualquiera de los números difusos que se elijan para operar, el división está dada por

$$divisionlx = [\min(Alx/Blx, Alx/Brx, Arx/Blx, Arx/Brx)];$$

$$divisionrx = [\max(Alx/Blx, Alx/Brx, Arx/Blx, Arx/Brx)];$$

Y para calcular los  $\alpha$  - cortes

$$acdivisionlx = [\min(acAlx/acBlx, acAlx/acBrx, acArx/acBlx, acArx/acBrx)];$$

$$acdivisionrx = [\max(acAlx/acBlx, acAlx/acBrx, acArx/acBlx, acArx/acBrx)];$$

# Apéndice B

## Instalación y Configuración de Herramienta Difusa

### B.1 Introducción

Este apéndice está dedicado a la instalación y configuración de la Herramienta Gráfica Difusa.

Para poder instalar y utilizar la Herramienta Gráfica Difusa correctamente, es necesario cumplir con los requisitos, siguientes:

- Sistema Operativo Windows XP o superior.

La Herramienta Gráfica Difusa se probó sobre una máquina con sistema operativo windows 7 ultimate 64-bit service pack 1.

## B.2 Instalar la Herramienta Gráfica Difusa

Para poder instalar la Herramienta Gráfica Difusa es necesario haber cumplido con los requisitos B.1. Si ya se tienen esos requisitos, entonces ahora veremos como se instala la Herramienta Gráfica Difusa.

El archivo EXE de la Herramienta Gráfica Difusa (HerramientaDifusa-pkg.exe) le daremos un click derecho (Windows XP hacer doble click) y elegimos la opción de ejecutar como administrador (ver figura B.1).

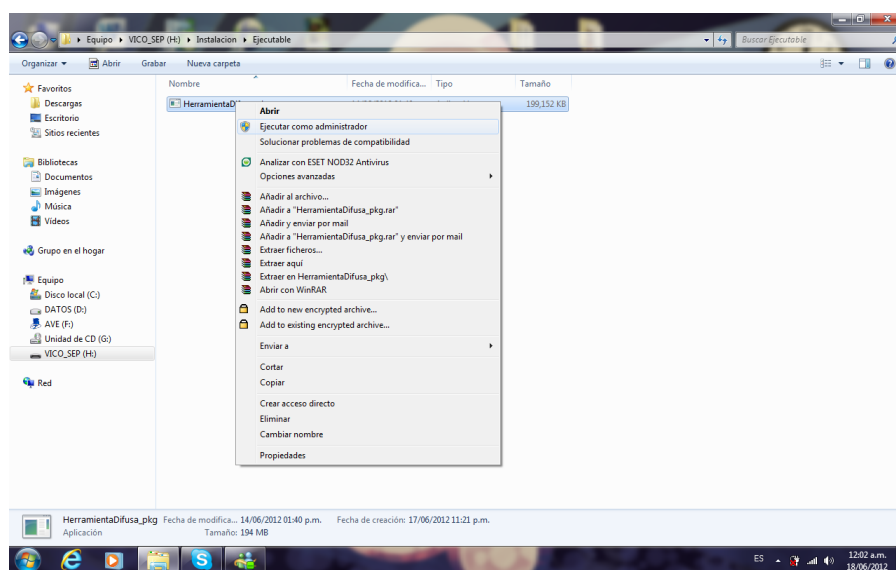


Figura B.1: Diagrama General del Sistema.

Una vez realizado el paso anterior, se iniciará la descompresión de los archivos necesarios para la llevar a cabo la instalación de la Herramienta Gráfica Difusa en el Sistema Operativo, esta operación puede durar algunos minutos.

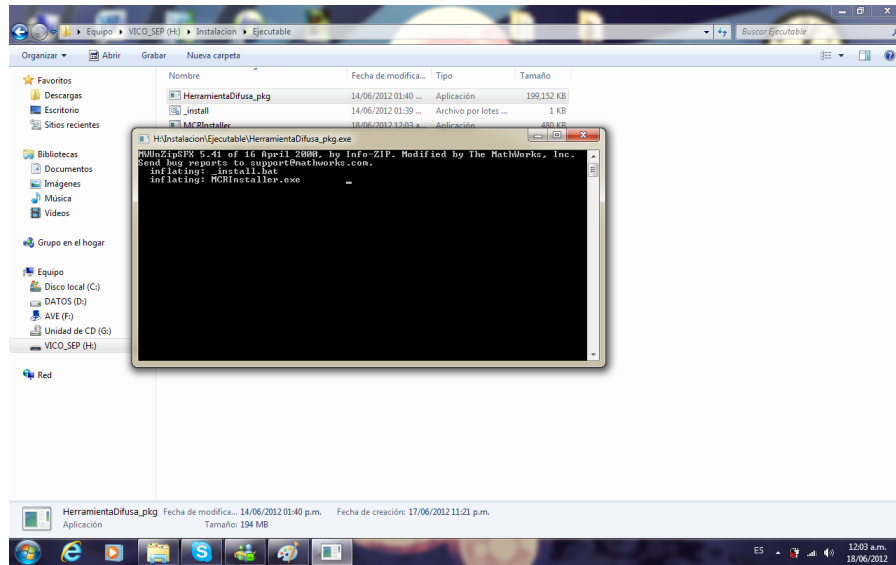


Figura B.2: El instalador está ahora descomprimiendo los archivos de instalación.

El siguiente paso es elegir el idioma de instalación, disponibles inglés y japonés, en este caso elegimos inglés y damos click en OK (el idioma sólo es para el despliegue de las instrucciones durante la instalación, ya que el sistema solo se presenta en español), este paso se observa en la figura B.3.

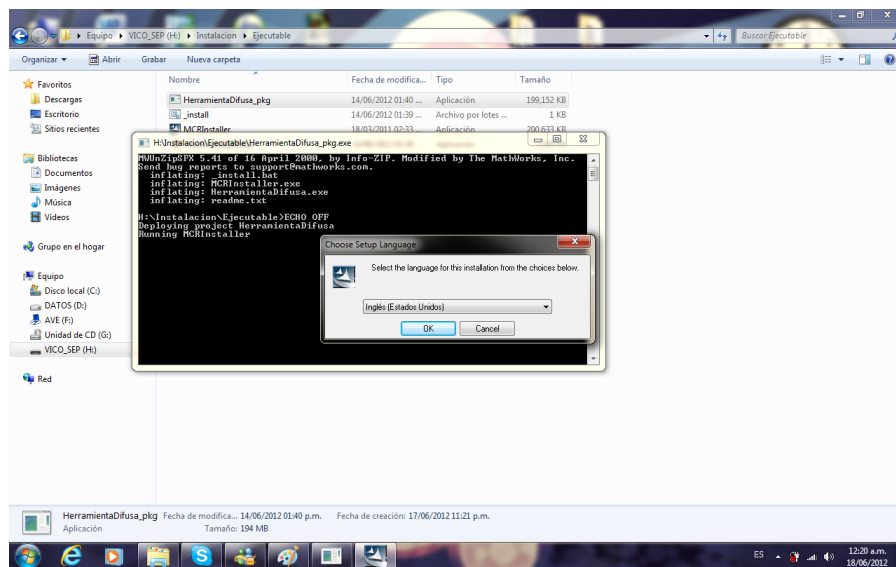


Figura B.3: Elección de idioma.

Ahora el instalador, llevará a cabo la instalación de algunos requerimientos necesarios en nuestro sistema operativo para el correcto funcionamiento de la Herramienta Gráfica Difusa, ver figura B.4.

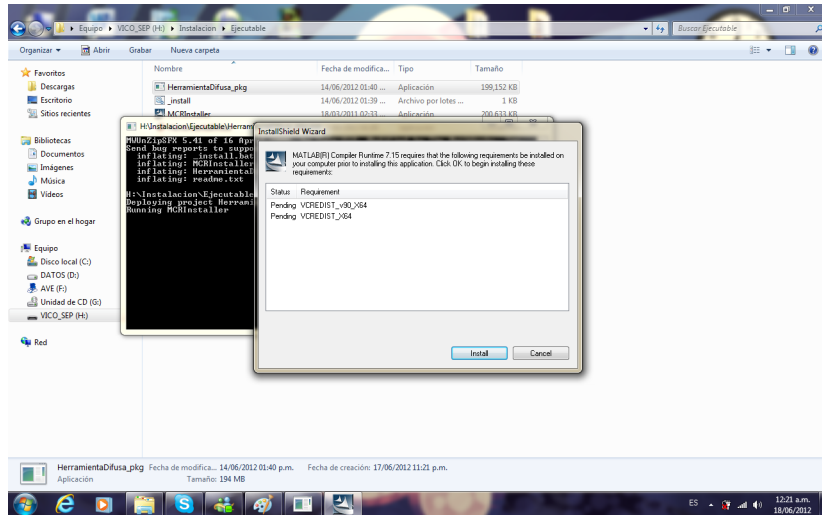


Figura B.4: Instalación de requerimientos.

Una vez concluido el paso anterior, estamos listos para iniciar la instalación de la Herramienta Gráfica Difusa, y se presenta como primera pantalla la que se observa en la figura B.5 y hacemos un click en next.

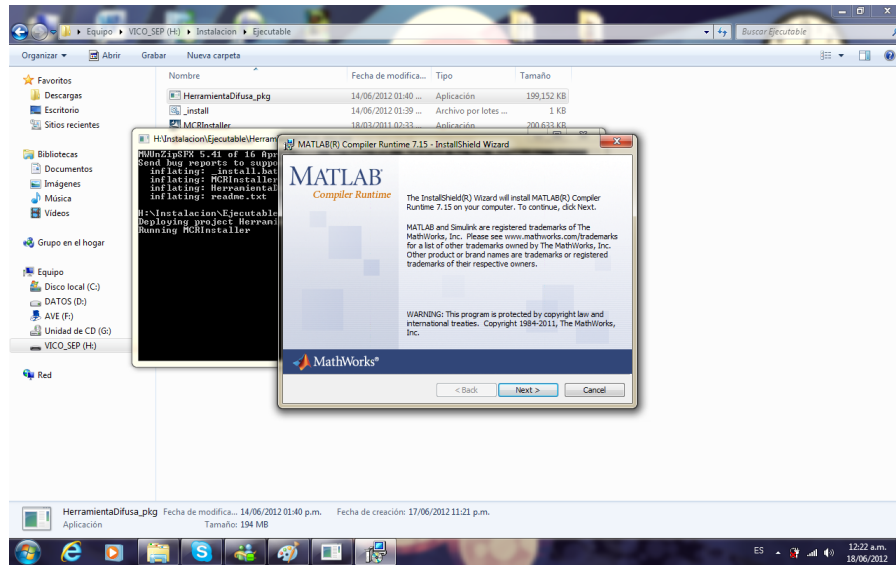


Figura B.5: Instalación de Herramienta Gráfica Difusa.

En este paso, podemos proporcionar los datos del usuario que utilizará el sistema y la organización a la que pertenece, aunque no son indispensable proporcionarlos para proseguir con la instalación. Una vez proporcionados los datos o en caso omiso a ellos, damos un click en next, ver figura B.6.

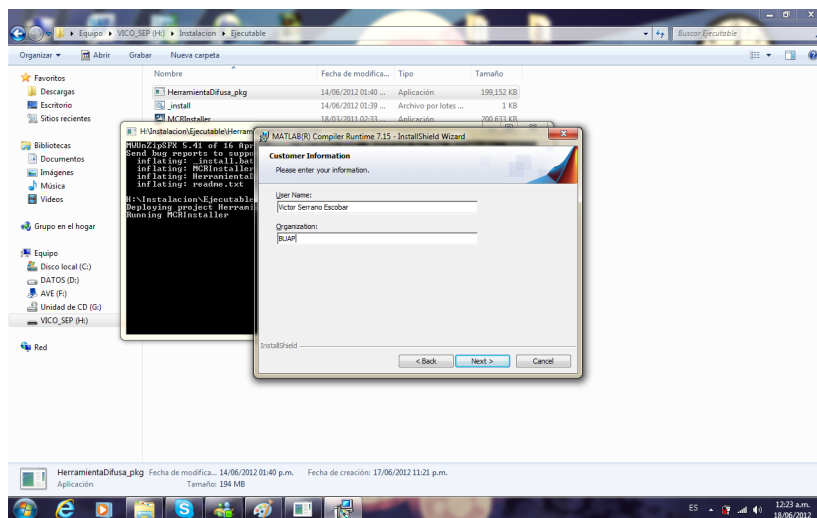


Figura B.6: Datos sobre usuario que utilizará la Herramienta Gráfica Difusa.

En la figura B.7 el usuario puede cambiar el folder donde se alojará la instalación del sistema, en caso el usuario desee cambiar el folder por default para la instalación del sistema deberá hacer un click en el botón change y elegir el folder de su preferencia. En caso contrario, sólo necesita realizar click en next.

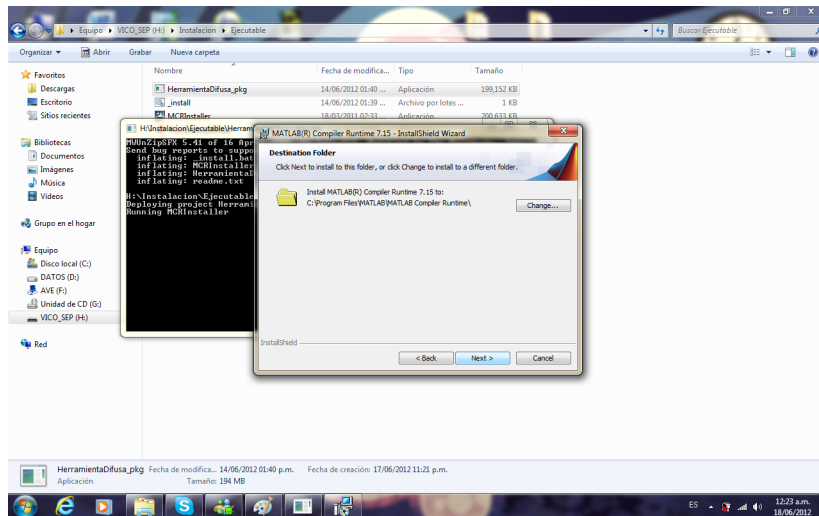


Figura B.7: Folder de instalación de la Herramienta Gráfica Difusa.

Ahora estamos listos para instalar la Herramienta Gráfica Difusa y como se muestra en la figura B.8, sólo daremos un click en install para realizar la instalación.

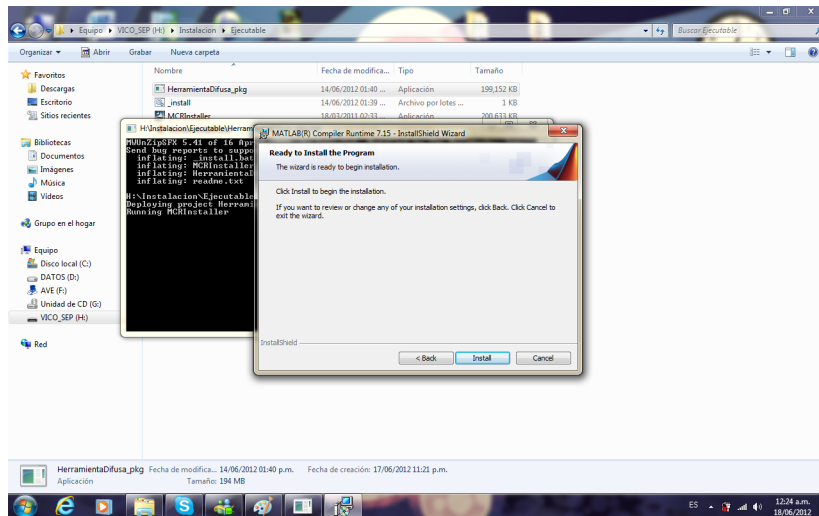


Figura B.8: Listo para instalar la Herramienta Gráfica Difusa.

En la figura B.9 se muestra en proceso de la Herramienta Gráfica Difusa.

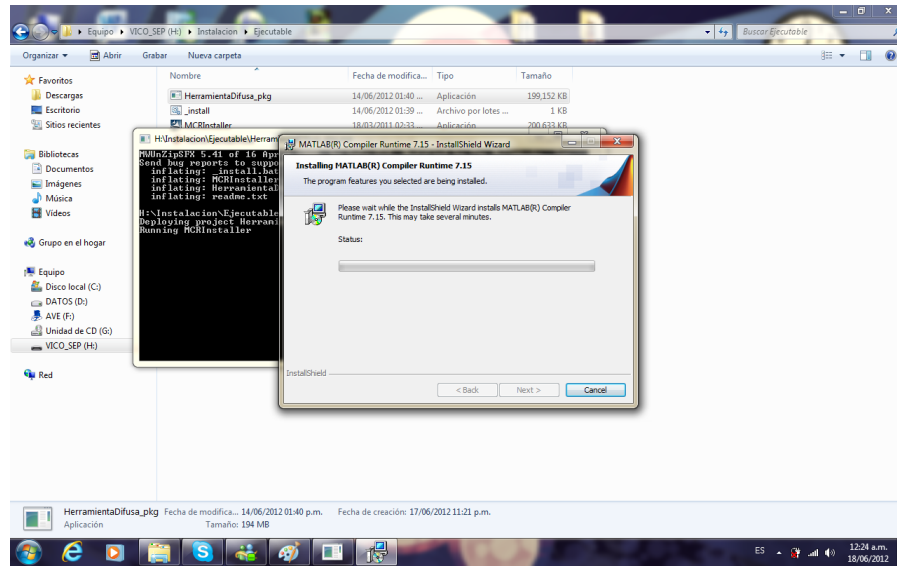


Figura B.9: Instalación de la Herramienta Gráfica Difusa.

Una vez concluido el proceso de instalación, se nos informará en la pantalla que el proceso de instalación se realizó con éxito, como podemos ver en la figura B.9

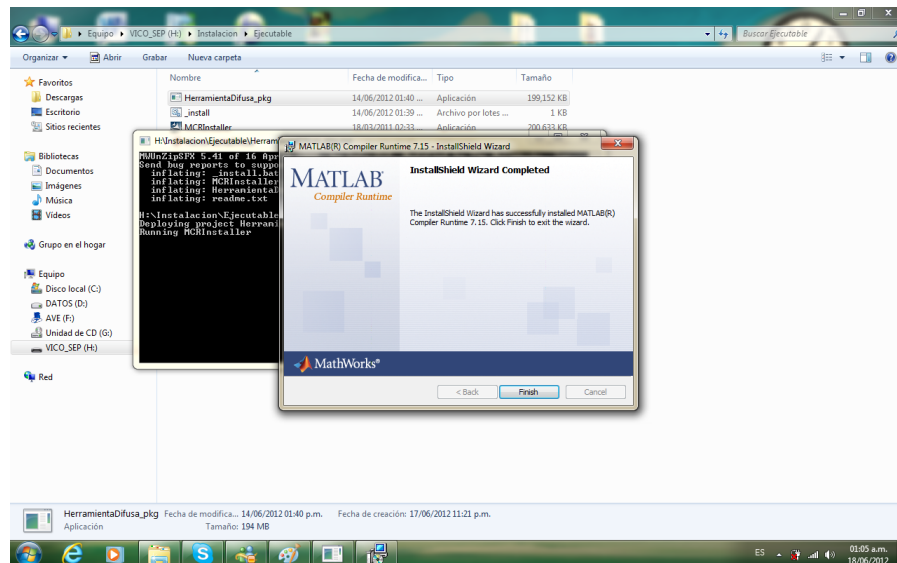


Figura B.10: Proceso de instalación finalizado con éxito.

Finalmente y una vez realizados todos los pasos descritos anteriormente, podemos ejecutar nuestra Herramienta Gráfica Difusa, en la figura B.11 se muestra el archivo ejecutable que se generó con nombre HerramientaDifusa y que pesa 1.08MB.

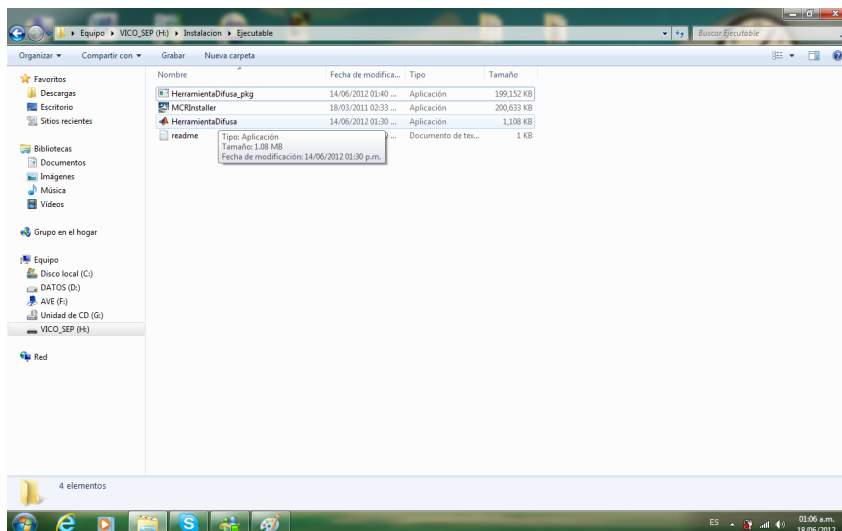


Figura B.11: Archivo ejecutable de la Herramienta Gráfica Difusa.

Si hacemos doble click en el archivo HerramientaDifusa se desplegará nuestra pantalla principal del sistema (ver figura B.12) y está listo para trabajarlo.

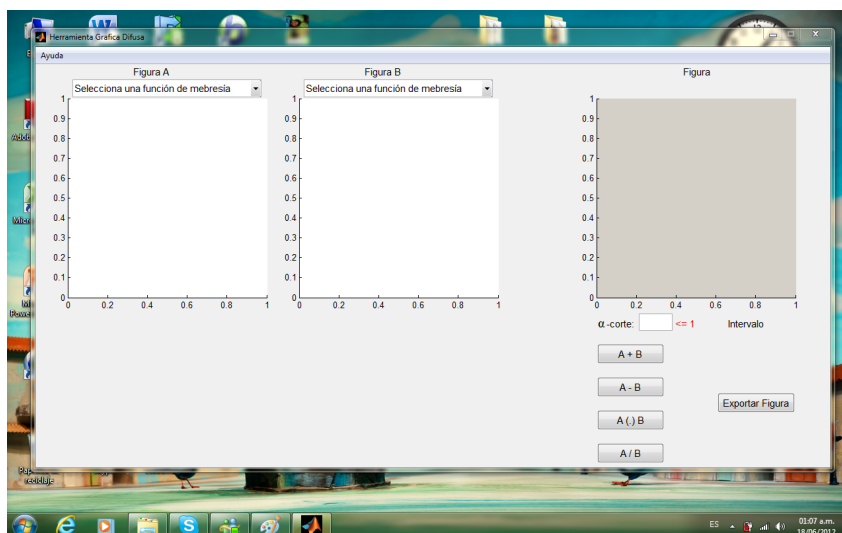


Figura B.12: Pantalla principal de la Herramienta Gráfica Difusa.

# Bibliografía

- [1] Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [2] Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - i. *Information Sciences*, 8(3):199–249, 1975.
- [3] Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:395, 1978.
- [4] Eds D.A. White, Donald A. Sofge. *Handbook of Intelligence Control*. Van Nostrand Reinhold, 1992.
- [5] Prade H. Dubois D. Operations on fuzzy numbers,. *Systems Sciences*, 9:613–626, 1978.
- [6] Maria Bojadziev George Bojadziev. *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management*. World Scientific, 1997.
- [7] Bo Yuan George J.Klir. *Fuzzi Sets and Fuzzy Logic: The Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.
- [8] J. Pejas J. Soldek. *Advanced Computer System*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [9] Bart Kosko. *Neural networks and fuzzy systems: a dynamical systems approach to machine intelligence*. Prentice Hall, 1992.
- [10] M.A. Vila M. Delgado, J.L. Verdegay. Fuzzy numbers, definitions and properties. *Mathware and Soft Computing*, 1(1):31–43, 1994.
- [11] Tom M. Michell. *Machine Learning*. WCB-Mc-Graw-Hill, 1997.

- [12] Antonio Javier Barragn Pia. Síntesis de sistemas de control borroso estables por diseño. Master's thesis, Universidad de Huelva, Mayo 2009.
- [13] Karsten Schulz and Bernd Huwe. Water flow modeling in the unsaturated zone with imprecise parameters using a fuzzy approach. *Journal of Hydroinformatics*, 1(201):211–229, 1997.
- [14] Karsten Schulz and Bernd Huwe. Uncertainty and sensitivity analysis of water transport modelling in a layered soil profile using fuzzy set theory. *Journal of Hydroinformatics*, 1(2):127–138, 1999.
- [15] Nashaat M. Hussien y Angel Barriga. Aplicación de lógica difusa en el control de contraste de imágenes. *ESTYLF*, 8:1–6, 2010.