



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Polinomios de Independencia de Grafos de Zykov
generalizados**

Tesis para la obtención de grado de Maestría en Ciencias de la
Computación

Realizada por:

Williams Gómez López

Dirigido por:

Dr. César Bautista Ramos.

Dr. Carlos Guillén Galván.

H. Puebla de Z., julio de 2014.

*Dedicado a mis padres: Arturo y María
y a mis hermanos: Wilbher y Daniel.*

Agradecimientos

Agradezco sinceramente a aquellas personas que compartieron sus conocimientos y su confianza para hacer posible la conclusión de esta tesis. Agradezco especialmente a mis asesores, el Dr. César Bautista Ramos y al Dr. Carlos Guillen Galván por sus asesorías y sus palabras de aliento para lograr mi objetivo. También agradezco al Dr. Rafael Lemuz López y a la Dra. Irene Olaya Ayaquica Martínez por sus ideas y recomendaciones para la corrección y presentación de esta tesis.

También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de mi maestría y finalmente, y no menos importante, agradezco a mi familia por el apoyo moral que me otorgaron durante la finalización de esta tesis.

Resumen

En esta tesis se calcula el polinomio de independencia de familias particulares de grafos usando la teoría de matrices de transferencia. Para hacer éste calculo, la familia de grafos se descompone en sumas de Zykov, a partir de las cuales, se obtienen fórmulas de recurrencias que permiten obtener los polinomios de independencia de cada elemento de la familia.

En el documento, se revisa la teoría elemental utilizada para obtener fórmulas y derivar así las ecuaciones de recurrencia necesarias para la obtención del polinomio de independencia. El trabajo que se presenta extiende una forma de comprimir las matrices de transferencia enunciando las condiciones necesarias para poder obtener dicha compresión.

Un resultado importante del trabajo es que plantea una hipótesis sobre el número de independencia de la familia de Petersen y con ello una conjetura sobre éste número para los grafos de Petersen de la forma $P(m, 2n)$, además de comprobar las ecuaciones que se propone en [BEA11].

Índice general

	III
Agradecimientos	V
Resumen	VII
Capítulo 1. Introducción	1
§1. Definiciones básicas	2
Capítulo 2. Suma de Zykov	3
§1. Suma abierta	3
§2. Suma Cerrada	7
§3. Poligrafos	10
Capítulo 3. Matriz de Transferencia	13
§1. Suma de Zykov abierta	13
§2. Suma cerrada de Zykov	22
§3. Forma generalizada de matrices de transferencia	27
§4. Compresión de matrices de transferencia	35
Capítulo 4. Resultados	47
§1. Grafo de Goldberg	47
§2. Grafo de Petersen $P(m, 4)$	51
§3. Conclusiones	70
Apéndices	71
Apéndice A.	73

§1. Series formales	73
§2. Teoría de Categorías	75
Apéndice. Bibliografía	81

Introducción

Una gran parte de la Teoría de Grafos consiste en el estudio de los invariantes de grafos, como por ejemplo el número cromático, el número de independencia y el número de dominación (*the domination number*). Por desgracia el cálculo de cada uno de estos es NP-difícil (*NP-hard*). De aquí que existen algoritmos de aproximación y heurísticas para obtener soluciones casi óptimas en tiempos relativamente razonables; sin embargo, estos algoritmos únicamente proporcionan cotas inferiores o superiores (ver [KV03]).

El número de independencia de un grafo es el máximo número de vértices independientes que pueda tener un grafo. Como se mencionó anteriormente, el cálculo de este número es NP-difícil; luego para formar el polinomio de independencia, donde los coeficientes corresponden al número de conjuntos independientes de cardinalidad igual al exponente de la variable que le precede, es también un problema NP-difícil.

Existen fórmulas cerradas o fórmulas en recurrencia para grafos sencillos ([VM05]) o cotas superiores e inferiores para familias de grafos en particular, como es el caso de los grafos de Petersen generalizados ([BEA11, XYXT09, FGS12]). Sin embargo en estos últimos trabajos sólo se calcula el número de independencia y no el polinomio de independencia para casos específicos de la familia.

El objetivo principal de este trabajo es el cálculo del polinomio de independencia sobre familias de grafos construidas a partir de un patrón repetitivo.

1. Definiciones básicas

En esta sección se dan las definiciones y notaciones básicas de la Teoría de Grafos utilizados a lo largo de este escrito.

Por [Die12] un grafo es un par de conjuntos $G = (V, E)$ tal que $E \subset [V]^2$, es decir los elementos de E son subconjuntos de dos elementos de V llamados *aristas* mientras que los elementos de V son llamados *vértices* (o *nodos* o *puntos*) del grafo de G .

En la literatura, los grafos se distinguen en grafos *dirigidos* y *no dirigidos*. Un grafo dirigido G es aquel grafo cuyas aristas tiene alguna orientación hacia sus vértices mientras que un grafo no dirigido no tiene orientación alguna. En [Die12] se hace notar que un grafo dirigido puede tener varias aristas entre los mismos dos vértices x, y . Tales aristas son llamadas *aristas múltiples* y si estas aristas tienen la misma dirección, entonces las aristas son paralelas. Además, se menciona que si una arista tiene como vértice inicial y vértice final al mismo vértice, entonces esta arista es llamada *bucle* o *ciclo*.

Los grafos que se estudiarán a lo largo del escrito, es un tipo especial llamados *grafos simples* cuya definición se enuncia a continuación.

Definición 1.1. Un *grafo simple* $G = (V, E)$ es un grafo finito, no dirigido sin aristas múltiples con vértices $V = V(G)$ y conjunto de aristas $E = E(G)$.

Algunos grafos simples que se encuentran en la Teoría de Grafos son K_n , P_n y C_n que denotan respectivamente el grafo completo de $n \geq 1$ vértices, el grafo ruta de longitud $n - 1$ y el grafo ciclo de $n \geq 3$ vértices.

Para definir el polinomio que se desea estudiar, primero se debe definir cuando un conjunto de vértices recibe el nombre de conjunto de vértices independiente o conjunto estable.

Definición 1.2. Sea G un grafo simple y $S \subset V(G)$. S es llamado un conjunto de vértices independiente o conjunto estable de G si para todo $u, v \in S$, $\{u, v\} \notin E(G)$.

De lo anterior, se define el polinomio de independencia.

Definición 1.3. Sea G un grafo e \mathcal{I} la colección de conjunto de vértices independiente de G . El polinomio de independencia $I(G, x)$ asociado al grafo G en la variable x , se define como

$$(1) \quad I(G, x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} x^{|\alpha|}$$

Suma de Zykov

1. Suma abierta

En la literatura se encuentran diferentes tipos de operaciones en grafos, tal es el caso de la unión, la intersección y la diferencia entre dos grafos [Die12]. Sin embargo, en este apartado se define la operación entre grafos que será usada a lo largo de este escrito, llamada *suma de Zykov* [Aro84] o llamada también poligrafo [BG86].

Definición 2.1. Sean G, H dos grafos simples con $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$. Sea $R : V(G) \rightarrow V(H)$ una relación entre los vértices de G y H . Luego la **suma de Zykov abierta** de los grafos G y H , denotado por $G +_R H$, se define por

$$\begin{aligned} V(G +_R H) &= V(G) \sqcup V(H) \\ E(G +_R H) &= E(G) \sqcup E(H) \sqcup \{\{g, h\} \mid g \in V(G), h \in V(H); gRh\} \end{aligned}$$

donde \sqcup denota la unión ajena de conjuntos.

Esta operación entre grafos define nuevas aristas que unen los grafos G y H usando la relación R , observe además que la operación se hace usando dos grafos pero en general esta operación puede hacerse usando una colección finita de grafos como se describe a continuación.

Suponga tres grafos simples G, H y K (quizás con bucles) y relaciones entre los vértices de los grafos $R : V(G) \rightarrow V(H)$, $S : V(H) \rightarrow V(K)$. Considere una nueva relación $S' : V(G) \sqcup V(H) \rightarrow V(K)$ como la extensión natural de la relación S definida como sigue: $gS'h$ si y sólo si gSh . Así la suma de Zykov de G, H y K se define como

$$G +_R H +_S K = (G +_R H) +_{S'} K$$

donde primero se realiza la suma entre los grafos G , H y posteriormente la suma con K . Cabe mencionar que esta última suma debe realizarse usando la extensión de la relación S , S' , debido a que el grafo al que se va a sumar es el grafo $G +_R H$ cuyos vértices son $V(G) \sqcup V(H)$ y no $V(H)$.

De lo mencionado anteriormente un punto a destacar es la propiedad asociativa de la suma de Zykov, ya que $(G +_R H) +_{S'} K \simeq G +_{R'} (H +_S K)$ donde R' es la extensión natural de la relación R y S' la extensión de S , a partir del cual la asociación de términos a la derecha o izquierda sigue siendo la misma (salvo isomorfismo). A partir de lo anterior se define la suma de Zykov de una colección finita de grafos como sigue.

Definición 2.2. Sean G_1, G_2, \dots, G_n una colección de grafos y $R_i : V(G_i) \rightarrow V(G_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n-1$ la i -ésima relación entre los vértices de G con los vértices de G_{i+1} . Entonces la suma de Zykov de esta colección de grafos se define como:

$$G_1 +_{R_1} G_2 +_{R_2} \cdots +_{R_{n-1}} G_n = (G_1 +_{R_1} G_2 +_{R_2} \cdots +_{R_{n-2}} G_{n-1}) +_{R'_{n-1}} G_n$$

donde la relación R'_{n-1} es la extensión natural de R_{n-1} .

Nota 2.1. En todas las relaciones definidas en sumas de Zykov, únicamente se usará la notación de la relación y no la notación de la relación que es la extensión natural resultante. De aquí, si R es una relación entre los vértices de un grafo, entonces la relación que resulta como extensión natural se denotará como R y no R' .

1.1. Ejemplos. En este apartado se discutirán algunos ejemplos de grafos simples los cuales pueden ser escritos como suma abierta de Zykov. Tales ejemplos se toman como referencias a los discutidos en [BRGG12], como son:

- **Rutas:** Sea P_0 el grafo *singletón* con $V(P_0) = \{v_0\}$ y $E(P_0) = \emptyset$. Sea $\text{Id} : V(P_0) \rightarrow V(P_0)$ la relación identidad. Entonces

$$P_n = \underbrace{P_0 +_{\text{Id}} P_0 +_{\text{Id}} \cdots +_{\text{Id}} P_0}_{n\text{-sumandos}}$$

es un grafo ruta con n vértices y longitud $n-1$, para $n \geq 1$

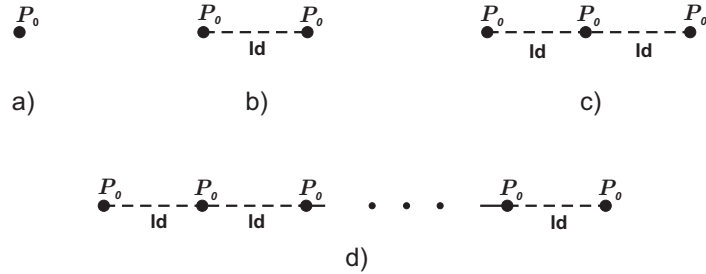


Figura 1. Rutas. Definiendo la suma de Zykov $P_0 +_{\text{Id}} P_0 +_{\text{Id}} \cdots +_{\text{Id}} P_0$, se obtendrá el grafo P_n , con $n \geq 1$. a) P_1 , b) $P_2 = P_0 +_{\text{Id}} P_0$, c) $P_3 = P_0 +_{\text{Id}} P_0 +_{\text{Id}} P_0$ y finalmente d) P_n .

- Rejillas (Grids) y cilindros:** El grid $G_{n,m}$ está definido por $V(G_{n,m}) = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ y $E(G_{n,m}) = \{(i, j), (u, v)\} \mid |i - u| + |j - v| = 1\}$. Entonces

$$G_{n,m} = \underbrace{P_n +_{\text{Id}} P_n +_{\text{Id}} \cdots +_{\text{Id}} P_n}_{m\text{-sumandos}}$$

donde las rutas P_n aparecen m veces e Id es la relación identidad sobre $V(P_n)$.

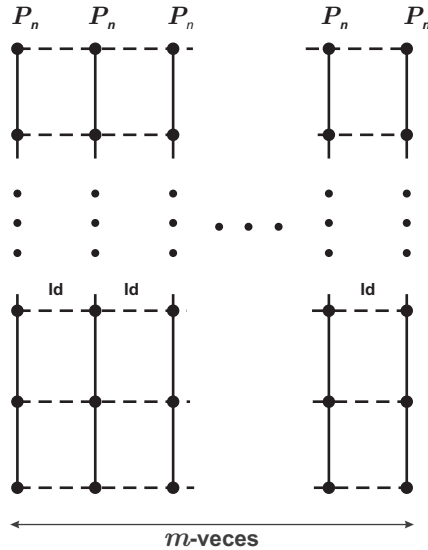


Figura 2. Rejilla $G_{n,m}$ definida como la suma de Zykov abierta $P_n +_{\text{Id}} \cdots +_{\text{Id}} P_n$, cuya relación es Id sobre los vértices de P_n .

Por otra parte, sea C_n el grafo n -ciclo e $\text{Id} : C_n \rightarrow C_n$ la relación identidad sobre $V(C_n)$. Entonces el cilindro $n \times m$ se define como

una suma de Zykov como

$$C_{n,m} = \underbrace{C_n +_{\text{Id}} C_n +_{\text{Id}} \cdots +_{\text{Id}} C_n}_{m\text{-veces}}$$

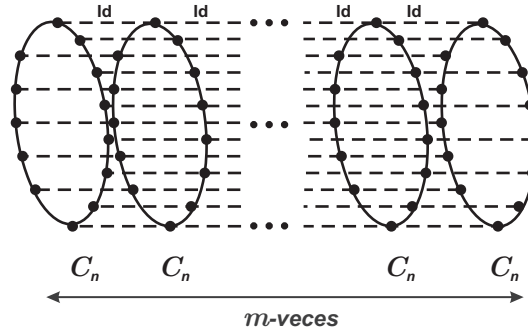


Figura 3. Cilindro.

Como se puede observar, los grafos mostrados anteriormente tienen como relación entre sus vértices a la relación identidad, sin embargo dicha relación puede ser diferente a la identidad cada vez que se sumen más grafos. Tal es el caso del grafo llamado *Nanotubo Zig-Zag*.

Sean m, n un par de números enteros no negativos con n par, y sea C_n el grafo ciclo de n vértices. Sean $R : V(C_n) \rightarrow V(C_n)$ y $S : V(C_n) \rightarrow V(C_n)$ relaciones entre los vértices de C_n definidas por:

$$R = \{(i, i) : i \text{ es par}\}, \quad S = \{(i, i) : i \text{ es impar}\}$$

Entonces, el grafo nanotubo zig-zag está definido por

$$\text{HTC}_6(n, m) = \underbrace{C_n +_R C_n +_S C_n +_R \cdots +_S C_n}_{m\text{-veces}}$$

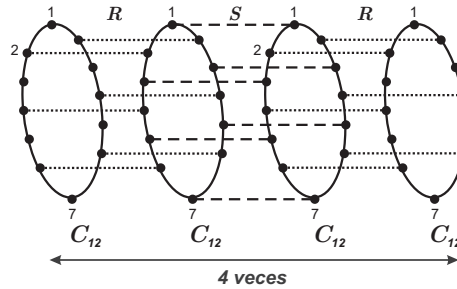


Figura 4. Nanotubo Zig-Zag \$\text{HTC}_6(12, 4)\$

Como puede observar, cada una de las relaciones se va intercalando por cada sumando nuevo que se le agregue, además de que las relaciones ahora no son la relación identidad. En la Fig. (4) se muestra un ejemplo particular de un nanotubo zig-zag.

Por otra parte, se puede definir a la suma de Zykov abierta mediante una forma recursiva, tal como se muestra a continuación [BRGG12]:

- **Hipercubos:** Sea Q_0 el grafo con conjunto de vértices el *singletón* $\{v\}$ y como conjunto de aristas el conjunto vacío. Entonces el hipercubo Q_n se puede definir recursivamente por $Q_{n+1} = Q_n +_{\text{Id}} Q_n$ con $n \geq 0$ e Id es la relación identidad sobre $V(Q_n)$.

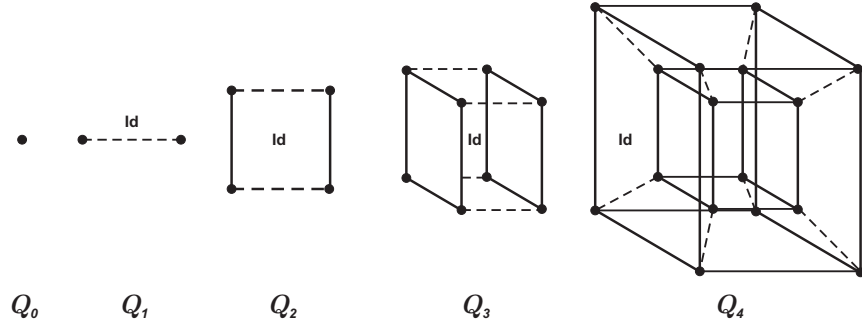


Figura 5. Q_n

2. Suma Cerrada

Otro tipo de suma es la llamada suma de Zykov cerrada la cual se define a continuación.

Definición 2.3. Sean G, H grafos y $R : V(G) \rightarrow V(H)$, $S : V(H) \rightarrow V(G)$ relaciones entre los vértices de los grafos de G y H , respectivamente. Entonces la suma cerrada de Zykov se denota y se define como

$$G \oplus_R H \oplus_S G$$

donde

$$\begin{aligned} V(G \oplus_R H \oplus_S G) &= V(G) \sqcup V(H) \\ E(G \oplus_R H \oplus_S G) &= E(G) \sqcup E(H) \sqcup E^R \sqcup E^S \end{aligned}$$

donde $E^I = \{\{u, v\} \mid uIv\}$, para $I \in \{R, S\}$

Para el caso general, se define lo siguiente:

Definición 2.4. Sean G_1, G_2, \dots, G_n grafos, $R_i : V(G_i) \rightarrow V(G_{i+1})$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$ y $R_n : V(G_n) \rightarrow V(G_1)$. Entonces se define y se denota la **suma de Zykov cerrada** por

$$G_1 \oplus_{R_1} G_2 \oplus_{R_2} \cdots \oplus_{R_{n-1}} G_n \oplus_{R_n} G_1$$

donde

$$V(G_1 \oplus_{R_1} G_2 \oplus_{R_2} \cdots \oplus_{R_{n-1}} G_n \oplus_{R_n} G_1) = \bigsqcup_{i=1}^n V(G_i)$$

$$E(G_1 \oplus_{R_1} G_2 \oplus_{R_2} \cdots \oplus_{R_{n-1}} G_n \oplus_{R_n} G_1) = \left(\bigsqcup_{i=1}^n E(G_i) \right) \sqcup E^{R_n}$$

donde $E^{R_n} = \{\{u, v\} \mid uR_nv\}$.

Uno de los puntos principales que se puede destacar es que en esta nueva suma, el primer y último grafo es el mismo, de aquí que la suma abierta de Zykov puede verse como una suma cerrada, en donde el último término de la suma tiene como relación la relación vacía. En otras palabras toda suma de Zykov, es una suma cerrada.

2.1. Ejemplos. En esta parte se definen algunas sumas de Zykov cerradas, así como algunos grafos bien conocidos como suma cerrada.

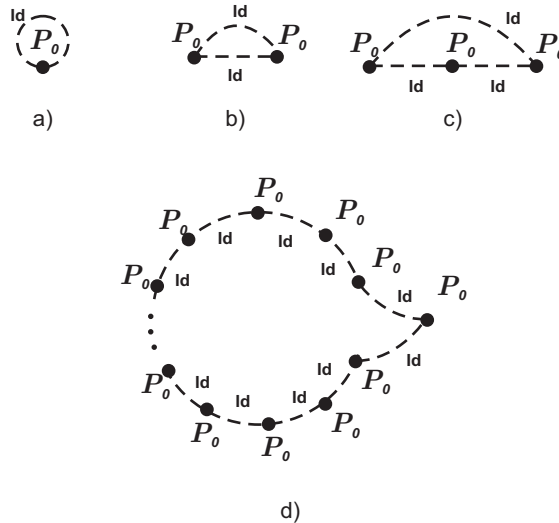


Figura 6. Ejemplos de suma de Zykov cerrada. Puede observar que los grafos C_n pueden definirse mediante una suma de Zykov cerrada. a) Un bucle $P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0$, b) $C_2 = P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0$, c) $C_3 = P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0$, d) Obtención de C_n .

En [BRGG12], se definen algunos ejemplos de suma de Zykov cerradas como se muestran a continuación

- **Toro:** La suma de Zykov

$$T_{n,m} = C_n \oplus_{\text{Id}} C_n \oplus_{\text{Id}} \cdots \oplus_{\text{Id}} C_n$$

es el grafo toro $n \times m$, donde C_n aparece $m + 1$ veces.

- **Grafos de Petersen Generalizados $P(i, 2)$.** Sea P_4 el grafo ruta con conjunto de vértices $V(P_4) = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea R la relación entre los vértices de P_4 definido por $1R1, 4R4$ y $3R2$ (Fig. 7)

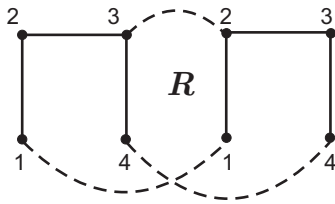


Figura 7. Definición de la relación R sobre los grafos P_4 . (La cual se muestra con líneas punteadas)

Luego, la familia de grafos de Petersen generalizados $\mathcal{G} = (P(2i, 2))_{i \geq 0}$ se define por

$$P(2i, 2) = P_4 \oplus_R P_4 \oplus_R \cdots \oplus_R P_4$$

donde el grafo P_4 aparece $i + 1$ veces, para $i \geq 1$.

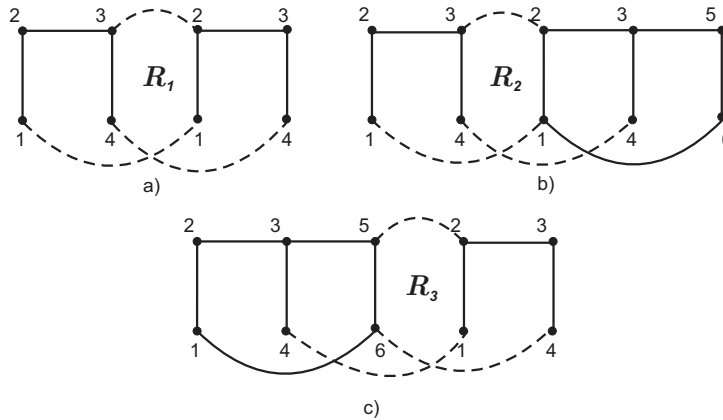


Figura 8. Definición de relaciones. a) $R_1 : P_4 \rightarrow P_4$, b) $R_2 : P_4 \rightarrow M$ y c) $R_3 : M \rightarrow P_4$. (Las cuales se muestran con líneas punteadas)

Por otra parte, el grafo de Petersen generalizado de la forma $P(2i + 1, 2)$, con $i \geq 2$ se forma a partir de la suma

$$P(2i + 1, 2) = \bigoplus_{k=1}^{i-1} P_4 \oplus_{R_2} M \oplus_{R_3} P_4$$

donde M es el grafo tal que $V(M) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E(M) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{1, 6\}\}$ y relaciones $R_1 : P_4 \rightarrow P_4$ dado por $R_1 = \{(1, 1), (4, 4), (3, 2)\}$, $R_2 : P_4 \rightarrow M$ definido mediante $R_2 = \{(1, 1), (4, 4), (3, 2)\}$ y finalmente $R_3 : M \rightarrow P_4$ por $R_3 = \{(4, 1), (6, 4), (5, 2)\}$

3. Poligrafos

Otro término que se le adjudica a la suma de Zykov es el de rotografo [BG86] que se define de la misma manera que en la Definición 2.4. Además se llama *monografo* a cada uno de los grafos que se estén sumando. En [BRGG12] se les llaman *patrones fundamentales*.

En [BG86] se usa los términos *fasciografo* y *rotografo*. El primero se refiere a la suma de Zykov abierta, en donde cada $G_i = G$, para toda $1 \leq i \leq n$; mientras que el segundo término se refiere a la suma de Zykov cerrada, en donde cada $G_i = G$ con $1 \leq i \leq n$.

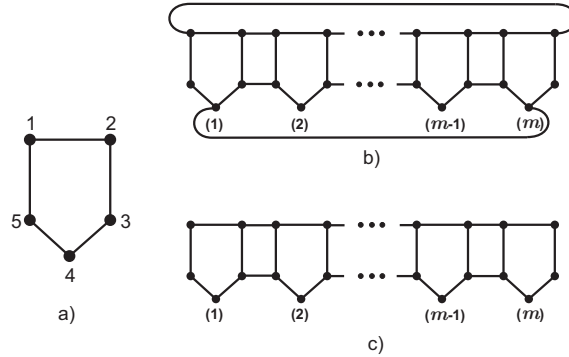


Figura 9. a) Monografo G , b) Rotografo c) Fasciografo.

En el trabajo que presenta [BG86] se muestra una forma de calcular de manera general el *acoplamiento polinomial* (*matching polynomial*) además de presentar algunos poligrafos como una descripción y generalización de notaciones de polímeros en química.

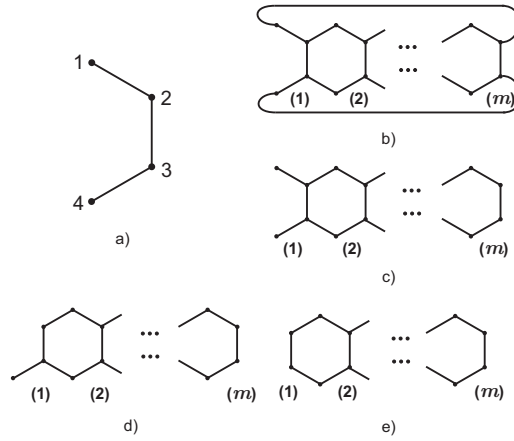


Figura 10. Poligrafo. a) Monografo G . b) Rotografo ω_m . c), d) e) Fasciografos γ_m , ρ_m y χ_m respectivamente.

Por otra parte en [BRGG12] se presenta un método práctico para el cálculo del número de Fibonacci de un grafo. Ambos trabajos se basan en la suma de Zykov.

Otro punto a remarcar es en la definición que presentan los autores en sus respectivos trabajos para definir la suma de Zykov. En [Aro84], las aristas que unen a los sumandos las definen mediante conjuntos; mientras que en [BG86] y [BRGG12] estas aristas las componen mediante relaciones binarias. En este trabajo se usará la notación mediante relaciones binarias.

A partir de ahora, los términos suma de Zykov o poligrafos se usarán de manera indistinta, además se utilizan también los términos fasciografos y rotografos introducidos por [BG86].

Matriz de Transferencia

1. Suma de Zykov abierta

A continuación se establece el método para la obtención de polinomios de independencia utilizando sumas de Zykov; este procedimiento es una generalización del método presentado en [BRGG12]. Además se presentará un método más general, que el expuesto en [LM08].

En [BRGG12] se define un nuevo producto punto, esto con la finalidad de contar conjuntos independientes usando el método de matriz de transferencia, para ello se basan en el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Sea $B = \{0, 1\}$ y $B^{V(G)} = \prod_{v \in V(G)} B_v$, con $B_v = B$, el producto cartesiano del conjunto B , $|V(G)|$ -veces. Entonces existe una única biyección $\psi_G : 2^{V(G)} \rightarrow B^{V(G)}$ tal que*

$$\pi_v(\psi_G(A)) = \chi_A, \quad \forall A \subset V(G), \forall v \in V(G)$$

donde $\pi_v : B^{V(G)} \rightarrow B$ es la v -ésima proyección y χ_A es la función característica de A .

La proposición anterior establece una conversión de los subconjuntos de vértices del grafo G en cadenas de 0's y 1's que proporciona parte de la definición de matrices de transferencia, la cual se enuncia a continuación

Definición 3.1. Sean G y H grafos, y $R : V(G) \rightarrow V(H)$ una relación. Entonces

1. Sean $A_1 \subseteq V(G)$ y $A_2 \subseteq V(H)$, el **producto punto** entre A_1 y A_2 bajo la relación R se denota y se define como

$$A_1 \bullet_R A_2 = \sum_{\substack{v,w \\ vRw}} \pi_v(\psi_G(A_1)) \pi_w(\psi_H(A_2))$$

2. Para \mathcal{I}_G e \mathcal{I}_H colecciones de conjuntos independientes de G y H respectivamente, se define la **matriz de transferencia** sobre la suma abierta de Zykov de G y H mediante

$$T(G +_R H; x, y) = \left((I_1 \bullet_R I_2)^* x^{|I_1|} y^{|I_2|} \right)_{I_1 \in \mathcal{I}_G, I_2 \in \mathcal{I}_H}$$

donde el operador $*$ recibe el nombre de *función signo negada* y está definida como

$$z^* = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

además para $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$ este operador cumple que $(z_1 + z_2)^* = z_1^* z_2^*$

Con la definición anterior, se pueden calcular los polinomios de independencia en sumas de Zykov abierta utilizando el método de transferencia utilizando el resultado que sigue.

Proposición 3.2. Sean G y H grafos y $R : V(G) \rightarrow V(H)$ una relación entre los vértices del grafo G y H . Entonces se cumple

$$I(G +_R H; x) = \mathbf{1} \cdot T(G +_R H; x, x) \cdot \mathbf{1}^t$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector fila de unos cuyo número de columnas coincide con el número de filas de la matriz $T(G +_R H, x, x)$.

Prueba: Por la Ec. (1) se obtiene

$$I(G +_R H, x) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{G+RH}} x^{|I|}$$

donde \mathcal{I}_{G+RH} es la colección de conjuntos de vértices independientes de la suma de Zykov abierta.

Si $I \in \mathcal{I}_{G+RH}$ entonces $I = V(G) \sqcup V(H)$, además $I = I_1 \cup I_2$ con $I_1 \in \mathcal{I}_G$ e $I_2 \in \mathcal{I}_H$, de aquí que $I_1 \bullet_R I_2 = 0$, esto último debido a que $\pi_v(\psi_G(I_1))$ no se relaciona con ninguna componente de $\pi_w(\psi_H(I_2))$ ya que si se relacionara entonces $I = I_1 \cup I_2$ no sería un conjunto independiente, así se tiene que

$$\begin{aligned}
I(G +_R H) &= \sum_{I \in \mathcal{I}_{G+RH}} x^{|I|} \\
&= \sum_{\substack{I_1 \in \mathcal{I}_G \\ I_2 \in \mathcal{I}_H}} (I_1 \bullet_R I_2)^* x^{|I_1|+|I_2|} \\
&= \sum_{\substack{I_1 \in \mathcal{I}_G \\ I_2 \in \mathcal{I}_H}} (I_1 \bullet_R I_2)^* x^{|I_1|} x^{|I_2|} \\
&= \mathbf{1} \cdot T(G +_R H, x, x) \cdot \mathbf{1}^t
\end{aligned}$$

□

Con lo anterior, se puede calcular el polinomio de independencia de cualesquiera dos grafos. Los resultados que a continuación se presentan son similares al resultado anterior para el caso de suma de tres grafos.

Proposición 3.3. Sean G, H, K grafos y $S : V(G) \rightarrow V(H)$, $T : V(H) \rightarrow V(K)$ relaciones entre los vértices de G con H y H con K , respectivamente, entonces

$$I(G +_R H +_S K; x) = \mathbf{1} \cdot \left(T(G +_R H; x, x^p) T(H +_S K; x^q, x) \right) \cdot \mathbf{1}^t$$

donde $p + q = 1$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Prueba: Nuevamente por la Ec. (1)

$$I(G +_R H +_S K; x) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{G+RH+SK}} x^{|I|}$$

Luego $I \in \mathcal{I}_{G+RH+SK}$ si y sólo si $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3$ con $I_1 \in \mathcal{I}_G$, $I_2 \in \mathcal{I}_H$ y $I_3 \in \mathcal{I}_K$. Además ocurre que $I_1 \bullet_R I_2 = 0$ y $I_2 \bullet_S I_3 = 0$ si y sólo si $(I_1 \bullet_R I_2) + (I_2 \bullet_S I_3) = 0$, de aquí

$$\begin{aligned}
I(G +_R H +_S K; x) &= \sum_{I \in \mathcal{I}_{G+R H+S K}} x^{|I|} \\
&= \sum_{\substack{I_1 \in \mathcal{I}_G \\ I_2 \in \mathcal{I}_H \\ I_3 \in \mathcal{I}_K}} \left((I_1 \bullet_R I_2) + (I_2 \bullet_S I_3) \right)^* x^{|I_1|+|I_2|+|I_3|} \\
&= \sum_{\substack{I_1 \in \mathcal{I}_G \\ I_2 \in \mathcal{I}_H \\ I_3 \in \mathcal{I}_K}} (I_1 \bullet_R I_2)^* (I_2 \bullet_S I_3)^* x^{|I_1|} x^{|I_2|} x^{|I_3|} \\
&= \sum_{\substack{I_1 \in \mathcal{I}_G \\ I_2 \in \mathcal{I}_K}} \sum_{I_3 \in \mathcal{I}_H} (I_1 \bullet_R I_2)^* x^{|I_1|} x^{p|I_2|} (I_2 \bullet_S I_3)^* x^{q|I_2|} x^{|I_3|} \\
&= \mathbb{1} \cdot \left(T(G +_R H; x, x^p) T(H +_S K; x^q, x) \right) \cdot \mathbb{1}^t
\end{aligned}$$

□

En general si se tiene una colección finita de grafos, entonces el cálculo del polinomio de independencia puede ser obtenido mediante el resultado siguiente.

Teorema 3.1. Sean H_1, H_2, \dots, H_k una colección de grafos y $R_i : V(H_i) \rightarrow V(H_{i+1})$ relaciones para $i = 1, \dots, k-1$. Entonces

$$\begin{aligned}
I(H_1 +_{R_1} \dots +_{R_{k-1}} H_k; x) &= \mathbb{1} \cdot T(H_1 +_{R_1} H_2; x, x^p) \cdot \\
&\quad T(H_2 +_{R_2} H_3; x^q, x^p) \cdot \dots \cdot T(H_{k-1} +_{R_k} H_k; x^q, x) \cdot \mathbb{1}^t
\end{aligned}$$

con $p, q \in \mathbb{R}$ y $p + q = 1$

Con el resultado anterior, para encontrar el polinomio de una colección finita de grafos, basta calcular cada una de las matrices de transferencia en pares consecutivos de grafos. Una vez hecho esto se multiplica cada una de estas matrices y finalmente se suman todas las entradas de la matriz resultante.

Cuando cada uno de los monografos de la suma son iguales, es decir cuando se tiene un fasciografo, se puede obtener una función generatriz, la cual se obtendrá de cada uno de los polinomios de independencia de la familia de fasciografos. Para ello se define primero la *serie de independencia* que sigue a continuación.

Definición 3.2. Sean G_0, G_1, \dots , una familia de grafos. Se define la **serie de independencia** de la familia G_* como la serie infinita

$$(2) \quad \mathbb{I}(G_*; z) = \sum_{n=0}^{\infty} I(G_n; x) z^n$$

donde cada uno de los coeficientes son elementos de $\mathbb{Z}[x]$.

Como se mencionó anteriormente, se puede encontrar una función generatriz que permite obtener cada uno de los coeficientes de la serie de independencia para los fasciografos. Sin embargo, se necesitan de resultados preliminares para poder obtener dicha función generatriz. Para ello, en las notas del Apéndice A se enuncia dichos resultados, en especial, el resultado del Corolario A.1 de dicho apartado el cual es utilizado para demostrar la siguiente proposición.

Corolario 3.1. *Sea G un grafo, $R : V(G) \rightarrow V(G)$ relación. Se define la siguiente sucesión de grafos*

$$G_0 = G, \quad G_{n+1} = G_n +_R G \text{ con } n \geq 0.$$

Entonces

$$\mathbb{I}(G_*; z) = I(G; x) + \mathbb{1} \cdot \left(z T(x, x) + T(x, x^p) \cdot \frac{z^2}{\text{Id} - z T(x^q, x^p)} \cdot T(x^q, x) \right) \cdot \mathbb{1}^t$$

donde $T(x, y) = T(G +_R G; x, y)$, Id es la matriz identidad de tamaño igual a $T(x, x)$ y además $p + q = 1$, con $p, q \in \mathbb{R}$.

Prueba: De la Definición 3.2 se sigue que la serie de independencia está dada por

$$\mathbb{I}(G_*; z) = \sum_{n=0}^{\infty} I(G_n; x) z^n$$

donde

$$\begin{aligned} I(G_n; x) &= I(\overbrace{G +_R G +_R G +_R \cdots +_R G}^{n+1\text{-sumandos}}; x) \\ &= \mathbb{1} \cdot \left(T(x, x^p) T(x^q, x^p) \cdots T(x^q, x^p) T(x^q, x) \right) \cdot \mathbb{1}^t \\ &= \mathbb{1} \cdot \left(T(x, x^p) T(x^q, x^p)^{n-2} T(x^q, x) \right) \cdot \mathbb{1}^t \text{ con } n \geq 2 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(G_*; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} I(G_n; x) z^n \\
&= I(G; x) + z I(G +_R G; x) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{1} \cdot \left(T(x, x^p) T(x^q, x^p)^{n-2} T(x^q, x) z^{n-2} \right) \cdot \mathbb{1}^t \\
&= I(G; x) + z \mathbb{1} \cdot T(x, x) \cdot \mathbb{1}^t \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1} \cdot \left(T(x, x^p) T(x^q, x^p)^n T(x^q, x) z^n \right) \cdot \mathbb{1}^t \\
&= I(G; x) + z \left(\mathbb{1} \cdot T(x, x) \cdot \mathbb{1}^t \right) \\
&\quad + z^2 \left(\mathbb{1} \cdot T(x, x^p) \cdot \left(\frac{1}{\text{Id} - T(x^q, x^p) z} \right) \cdot T(x^q, x) \cdot \mathbb{1}^t \right) \\
&= I(G; x) \\
&\quad + \mathbb{1} \cdot \left(z T(x, x) + T(x, x^p) \cdot \frac{z^2}{\text{Id} - z T(x^q, x^p)} \cdot T(x^q, x) \right) \cdot \mathbb{1}^t
\end{aligned}$$

□

1.1. Ejemplos. Ahora se mostrarán algunos ejemplos haciendo una comparación de los resultados que se obtienen al calcular los polinomios de independencia mediante el uso de matriz de transferencia y los resultados obtenidos de [VM05].

1.1.1. Rutas. En el capítulo anterior, se observó que toda ruta de n aristas puede ser representada como una suma de Zykov, es decir

$$P_n = \underbrace{P_0 +_{\text{Id}} P_0 +_{\text{Id}} \cdots +_{\text{Id}} P_0}_{n\text{-sumandos}}$$

Se utilizarán los resultados anteriores para calcular los polinomios de independencia y compararlos con algunas fórmulas que se obtienen en [VM05].

Para ello primero se utilizará el resultado de la Proposición 3.2 para calcular el polinomio de independencia de dos monografos y después para calcular el polinomio de independencia para tres (Proposición 3.3).

Por la Proposición 3.2, se tiene que

$$I(P_2; x) = \mathbb{1} \cdot T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x, x) \mathbb{1}^t$$

donde

$$T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x, x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} I(P_2; x) &= \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}^t \\ &= 1 + 2x \end{aligned}$$

Para el caso de tres monografos, por la Proposición 3.3 se sigue que

$$I(P_3; x) = \mathbf{1} \cdot T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x, x^p) \cdot T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x^q, x) \cdot \mathbf{1}^t$$

donde las matrices de transferencias están dadas por

$$T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x, x^p) = \begin{pmatrix} 1 & x^p \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x^q, x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^q & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, se obtiene que

$$\begin{aligned} I(P_3; x) &= \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x^p \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^q & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}^t \\ &= 1 + 2x + x^2 + x^{p+q} \\ &= 1 + 3x + x^2 \end{aligned}$$

En [VM05] se muestra una fórmula cerrada para la obtención del polinomio de independencia de las rutas P_n , la cual es la siguiente.

$$(3) \quad I(P_n, x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-j}{j} x^j$$

Los resultados que se obtuvieron para calcular $I(P_2; x)$ e $I(P_3; x)$ coincide al aplicar la fórmula cerrada de la Ec. (3).

Por otra parte, al usar el resultado del Corolario (3.1) se obtendrá una función generatriz para la obtención de los polinomios de independencia para el grafo P_n . De aquí que las matrices de transferencia están dadas por

$$\begin{aligned} T(x, x) &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} & T(x, x^p) &= \begin{pmatrix} 1 & x^p \\ x & 0 \end{pmatrix} \\ T(x^q, x) &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^q & 0 \end{pmatrix} & T(x^q, x^p) &= \begin{pmatrix} 1 & x^p \\ x^q & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta nuevamente que $p+q=1$, la serie de independencia para el fasciografo está dada por

$$\mathbb{I}(G_*; z) = -\frac{xz + x + 1}{xz^2 + z - 1}$$

donde esta última es la función generatriz. Observe que el denominador de la función generatriz proporciona una ecuación de recurrencia de grado dos, la cual está dada por

$$I(P_n; x) = I(P_{n-1}; x) + xI(P_{n-2}; x), \text{ para } n \geq 2$$

cuyas condiciones iniciales están dadas por $I(P_0; x) = 1 + x$ y $I(P_1; x) = 1 + 2x$. En [Aro84] se demuestra que

$$\begin{aligned} I(P_n; x) &= I(P_{n-1}; x) + xI(P_{n-2}; x) \\ &= F_{n+1}(x) \end{aligned}$$

donde F_{n+1} es el *polinomio de Fibonacci* definido recursivamente por

$$F_0(x) = 1, \quad F_1(x) = 1, \quad F_n(x) = F_{n-1}(x) + xF_{n-2}(x).$$

Así, la fórmula cerrada presentada en [VM05] es la solución de la recursión del polinomio de Fibonacci. De aquí que la fórmula presentada por el método de matriz de transferencia es la misma que la Ec. 3.

1.1.2. Cienpiés. Ahora se aplican los mismos resultados obtenidos de las Proposiciones 3.2 y 3.3 para los polinomios de independencia del grafo W_n .

Sea el monografo P_2 , el grafo ruta de dos vértices, y sea $R : V(P_2) \rightarrow V(P_2)$ una relación binaria definida por $R = \{(2, 2)\}$. Luego, a partir de los monografos P_2 , el grafo W_n es un fasciografo representado por

$$W_n = P_2 +_R P_2 +_R \cdots +_R P_2$$

en donde el monografo P_2 aparece n -veces.

Primero, se calcula el polinomio de independencia del grafo W_2 . Aplicando el resultado de la Proposición 3.2 se tiene que

$$I(W_2; x) = \mathbf{1} \cdot T(P_2 +_R P_2; x, x) \cdot \mathbf{1}^t$$

donde

$$T(P_2 +_R P_2; x, x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & x^2 & x^2 \\ x & x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así se obtiene que

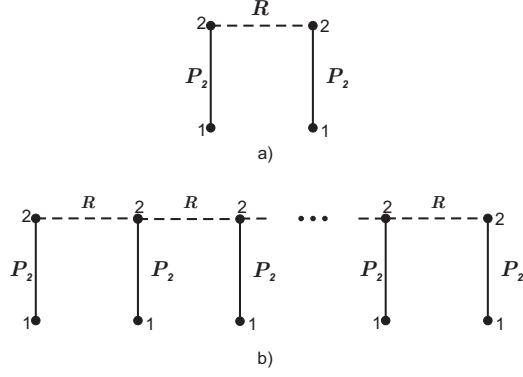


Figura 1. Fasciagrafo. a) Se observa los monografos P_2 formando el W_2 junto con la relación R . b) Fasciagrafo para representar W_n

$$\begin{aligned}
 I(W_2; x) &= \mathbb{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & x^2 & x^2 \\ x & x^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1}^t \\
 &= 1 + 4x + 3x^2
 \end{aligned}$$

Por otra parte, para calcular $I(W_3; x)$, basta aplicar la Proposición 3.3, donde

$$\begin{aligned}
 T(P_2 +_R P_2; x, x^p) &= \begin{pmatrix} 1 & x^p & x^p \\ x & x^{p+1} & x^{p+1} \\ x & x^{p+1} & 0 \end{pmatrix} \\
 T(P_2 +_R P_2; x^q, x) &= \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x^q & x^{q+1} & x^{q+1} \\ x^q & x^{q+1} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $p + q = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 I(W_3; x) &= \mathbb{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x^p & x^p \\ x & x^{p+1} & x^{p+1} \\ x & x^{p+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x^q & x^{q+1} & x^{q+1} \\ x^q & x^{q+1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1}^t \\
 &= 1 + 4x + 4x^2 + 2x^{p+q} + 6x^{1+p+q} + 5x^{2+p+q} \\
 &= 1 + 6x + 10x^2 + 5x^3
 \end{aligned}$$

Aplicando el resultado del Corolario 3.1, se obtiene la función generatriz para el grafo W_n , con las matrices de transferencias dadas por

$$T(x, x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & x^2 & x^2 \\ x & x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x, x^p) = \begin{pmatrix} 1 & x^p & x^p \\ x & x^{p+1} & x^{p+1} \\ x & x^{p+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T(x^q, x^p) = \begin{pmatrix} 1 & x^p & x^p \\ x^q & x & x \\ x^q & x & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x^q, x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x^q & x^{q+1} & x^{q+1} \\ x^q & x^{q+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto se tiene

$$(4) \quad \mathbb{I}(G_*; x) = -\frac{x^2z + x(z+2) + 1}{x(x+1)z^2 + (x+1)z - 1}$$

Nuevamente se puede observar que en el denominador de la función generatriz se obtiene una función de recurrencia, para este caso de grado dos expresada por

$$I(W_n; x) = (x+1)I(W_{n-1}; x) + x(x+1)I(W_{n-2}; x)$$

$$\text{con } I(W_1; x) = 1 + 2x \text{ y } I(W_2; x) = 1 + 4x + 3x^2$$

Por otra parte, en [VM05] se presenta una fórmula recursiva para obtener el mismo resultado, es decir

$$I(W_n; x) = (1+x)(I(W_{n-1}; x) + x \cdot I(W_{n-2}))$$

con $I(W_0; x) = 1$ y $I(W_1; x) = 1+2x$. Observe que las ecuaciones presentadas anteriormente son iguales, sólo las condiciones iniciales son distintas debido a que, usando el método de transferencia, el primer valor de la condición se refiere al polinomio de independencia del grafo W_1 , mientras que en [VM05] el primer valor corresponde al grafo W_0 .

2. Suma cerrada de Zykov

Una vez presentados los resultados correspondientes a la suma abierta de Zykov, se procede a enunciar algunos resultados principales para el caso de sumas cerradas.

Proposición 3.4. *Sea G un grafo y sea $R : V(G) \rightarrow V(G)$ relación. Entonces*

$$I(G \oplus_R G; x) = \text{Tr}(T(G + G; x^p, x^q)),$$

para $p + q = 1$ con $p, q \in \mathbb{R}$.

Prueba: En efecto, $J \in I_{G \oplus_R G}$ sí y sólo si $J \in \mathcal{I}_G$ y $J \bullet_R J = 0$, donde \mathcal{I}_G es la colección de conjuntos independientes del grafo G . Así por definición se tiene que:

$$\begin{aligned}
I(G \oplus_R G; x) &= \sum_{J \in \mathcal{I}_{G \oplus_R G}} x^{|J|} \\
&= \sum_{J \in \mathcal{I}_G} (J \bullet_R J)^* x^{|J|} \\
&= \text{Tr}(T(G +_R G; x^p, x^q))
\end{aligned}$$

□

Se puede observar, que para hallar el polinomio de independencia de una suma de Zykov cerrada, se usa la matriz de transferencia de la suma abierta. Como se muestra en los resultados posteriores, esto se realiza siempre.

Proposición 3.5. Sean G, H grafos y $R : V(G) \rightarrow V(H)$, $S : V(H) \rightarrow V(G)$ relaciones entre los vértices de los grafos G y H , respectivamente. Entonces

$$I(G \oplus_R H \oplus_S G; x) = \text{Tr}(T(G +_R H; x^p, x^p)T(H +_S G; x^q, x^q))$$

con $p + q = 1$ y $p, q \in \mathbb{R}$.

Prueba: En efecto, si

$$(5) \quad I(G \oplus_R H \oplus_S G; x) = \sum_{J \in \mathcal{I}_{G \oplus_R H \oplus_S G}} x^{|J|}$$

entonces para cada $J \in \mathcal{I}_{G \oplus_R H \oplus_S G}$, $J = I_G \sqcup I_H$ además $I_G \bullet_R I_H = 0$ y $I_H \bullet_S I_G = 0$ sí y sólo si $J = I_G \sqcup I_H$ y $(I_G \bullet_R I_H) + (I_H \bullet_S I_G) = 0$. Luego, la Ec. (5) queda expresada por:

$$\begin{aligned}
I(G \oplus_R H \oplus_S G; x) &= \sum_{\substack{I_G \in \mathcal{I}_G \\ I_H \in \mathcal{I}_H}} (I_G \bullet_R I_H)^* (I_H \bullet_S I_G)^* x^{|I_G| + |I_H|} \\
&= \sum_{\substack{I_G \in \mathcal{I}_G \\ I_H \in \mathcal{I}_H}} (I_G \bullet_R I_H)^* x^{p|I_G|} x^{p|I_H|} (I_H \bullet_S I_G)^* x^{q|I_H|} x^{q|I_G|} \\
&= \sum_{\substack{I_G \in \mathcal{I}_G \\ I_H \in \mathcal{I}_H}} T(G +_R H; x^p, x^p)_{I_G, I_H} T(H +_S G; x^q, x^q)_{I_H, I_G} \\
&= \text{Tr}(T(G +_R H; x^p, x^p) T(H +_S G; x^p, x^q))
\end{aligned}$$

para $p + q = 1$.

□

Como un punto importante del resultado anterior, las entradas de las variables x, y de las matrices de transferencia pueden cambiar, es decir, que

el resultado anterior puede enunciarse como

$$I(G \oplus_R H \oplus_S G; x) = \text{Tr}(T(G +_R H; x^p, x^q)T(H +_S G; x^p, x^q))$$

con $p + q = 1$ y $p, q \in \mathbb{R}$ cuya demostración es la misma que la de la proposición anterior, salvo que al momento de repartir los conjuntos independientes, es decir al asociar los factores $x^p|I_G|$ con $x^p|I_H|$ se asocia con $x^q|I_G|$. De aquí que se sigue el resultado.

Por otra parte, es fácil demostrar la siguiente proposición, la cual permite calcular el polinomio de independencia para la suma de Zykov cerrada de tres grafos.

Proposición 3.6. Sean G, H, J grafos y $R : V(G) \rightarrow V(H)$, $S : V(H) \rightarrow V(J)$ y $T : V(J) \rightarrow V(G)$ relaciones entre los vértices de los grafos G, H y J , respectivamente. Entonces

$$I(G \oplus_R H \oplus_S J \oplus_T G; x) = \text{Tr} \left(T(G +_R H; x^p, x^q)T(H +_S J; x^p, x^q) \right. \\ \left. T(J +_T G; x^p, x^q) \right)$$

con $p + q = 1$ y $p, q \in \mathbb{R}$.

La demostración de este resultado es análogo al presentado en la Proposición 3.5.

De manera general, el polinomio de independencia de la suma cerrada de Zykov es la traza de la matriz resultante de las multiplicaciones de las matrices de transferencia. De manera similar se puede hallar la función generatriz de un rotografo para un monografo G , el cual se enuncia a continuación.

Teorema 3.2. Sea G grafo y R relación sobre $V(G)$. Sea $S_0 = G$, $S_1 = G \oplus_R G$, $S_2 = G \oplus_R G \oplus_R G, \dots$ una sucesión de sumas cerradas de Zykov. Además, se define

$$Q(x, z) = \det(\text{Id} - zT(G +_R G; x^p, x^q)), \text{ con } p + q = 1$$

Entonces

$$\mathbb{I}(S_*; z) = \sum_{k=0}^{\infty} I(S_k; x)z^k \\ = I(G; x) - z \frac{\partial}{\partial z} \log Q(x, z)$$

Prueba: Sean $S_0 = G$, $S_1 = G \oplus_R G$, $S_2 = G \oplus_R G \oplus_R G, \dots$ una sucesión de sumas cerradas de Zykov, luego por definición de serie de independencia se tiene que

$$\mathbb{I}(S_*; z) = \sum_{k=0}^{\infty} I(S_k; x)z^k$$

donde

$$\begin{aligned}
 I(S_k; x) &= I(\overbrace{G \oplus_R G \oplus_R \cdots \oplus_R G}^{k+1 \text{ sumandos}}) \\
 &= \text{Tr}(T(G +_R G; x^p, x^q) \cdots T(G +_R G; x^p, x^q)) \\
 &= \text{Tr}(T(G +_R G)^k), \text{ con } k \geq 1
 \end{aligned}$$

Así, se obtiene que la serie de independencia está dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}(S_*; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} I(S_k; x) z^k \\
 &= I(S_0; x) z^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Tr}(T(G +_R G)^k) z^k \\
 &= I(G; x) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Tr}(T(G +_R G)^k) z^k
 \end{aligned}$$

Observe que, la $\text{Tr} A^n$ puede ser escrito por las raíces del polinomio $\det(\text{Id} - zA)$, es decir

$$\text{Tr} A^n = \omega_1^n + \cdots + \omega_q^n$$

para A una matriz cuadrada.

Por otra parte, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Tr}(Az)^n = \frac{\omega_1 z}{1 - \omega_1 z} + \cdots + \frac{\omega_q z}{1 - \omega_q z}$$

con esto, al colocar los elementos del denominador $(1 - \omega_1 z) \cdots (1 - \omega_q z) = Q(z)$, los elementos del numerador se reescribe como $-zQ'(z)$, es decir

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} A^n &= -\frac{zQ'(z)}{Q(z)} \\
 &= -z \frac{\partial}{\partial z} \log Q(z)
 \end{aligned}$$

de aquí que se sigue el resultado. \square

2.1. Ejemplos. Ahora, se revisarán algunos ejemplos empleando las fórmulas obtenidas anteriormente.

2.1.1. Ciclos. Sea el monografo P_0 y la relación $\text{Id} : V(P_0) \rightarrow V(P_0)$. Entonces, todo ciclo de n , con $n \geq 3$ puede expresarse como

$$C_n = \overbrace{P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0 \oplus_{\text{Id}} \cdots \oplus_{\text{Id}} P_0}^{n+1\text{-sumandos}}$$

De lo anterior, para calcular el grafo ciclo C_3 por suma de Zykov cerrada se tiene

$$C_3 = P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0$$

Luego para calcular el polinomio de independencia se hace uso de la Proposición 3.6 y observando además que las matrices de transferencia son las mismas se obtiene que

$$I(C_3; x) = \text{Tr} (T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x^p, x^q)^2)$$

donde

$$T(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x^p, x^q) = \begin{pmatrix} 1 & x^q \\ x^p & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, se obtiene que

$$\begin{aligned} I(C_3; x) &= \text{Tr} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & x^q \\ x^p & 0 \end{pmatrix} \right)^3 \right) \\ &= 1 + 3x^{p+q} \\ &= 1 + 3x \end{aligned}$$

Por otra parte, utilizando el resultado del Teorema (3.2) se obtiene una función generatriz para el cálculo del polinomio de independencia del grafo C_n , con $n \geq 3$. Así

$$\mathbb{I}(S_*; z) = I(P_0; x) - z \frac{\partial}{\partial z} \log Q(x, z)$$

donde

$$Q(x, z) = \det (I - zT(P_0 +_{\text{Id}} P_0; x^p, x^q)), \quad p + q = 1$$

Luego, se obtiene

$$\mathbb{I}(S_*; z) = \frac{z - 2}{xz^2 + z - 1} + x - 1$$

De esta función, se obtiene una ecuación de recurrencia de grado dos, la cual es

$$(6) \quad I(C_n; x) = I(C_{n-1}; x) + x I(C_{n-2}; x)$$

cuyas condiciones iniciales son $I(C_0; x) = 1 + x$ y $I(C_1; x) = 1 + 2x$

En [Aro84], se demuestra que

$$I(C_n; x) = I(P_{n-1}; x) + x I(P_{n-3}; x)$$

Haciendo uso de esta ecuación se obtiene la Ec. (6), además [Aro84] se deduce una fórmula recursiva en términos del polinomio de Fibonacci, la cual es

$$I(C_n; x) = F_{n-1}(x) + 2x F_{n-2}(x)$$

donde $F_n(x)$ es el polinomio de Fibonacci.

Cabe mencionar que las condiciones iniciales de la Ec. (6) no corresponden a los polinomios de independencia de los grafos C_0 y C_1 , respectivamente. Esto debido a que al formar la suma de Zykov cerrada de C_0 , se obtiene un vértice con un bucle y el grafo C_1 es el grafo de dos vértices con dos aristas incidentes en dichos vértices (Observe la Fig. 2). Así la Ec. (6) únicamente es válida para el caso de que $n \geq 3$, caso contrario a la suma abierta de Zykov.

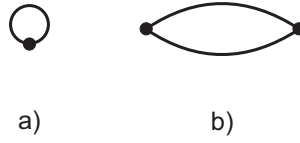


Figura 2. Grafos resultantes de la suma de Zykov cerrada. En a) la suma $P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0$, la cual corresponde a un ciclo y b) corresponde a la suma $P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0 \oplus_{\text{Id}} P_0$ que corresponde a un grafo con dos aristas.

3. Forma generalizada de matrices de transferencia

En la sección anterior se habló de la forma de aplicar las matrices de transferencia para el cálculo de los polinomios de independencia en sumas de Zykov. Sin embargo, no únicamente se aplican las matrices de transferencia para este cálculo, en [LM08] se presenta una aplicación del método de matriz de transferencia para obtener el número de morfismos entre dos grafos. Esto incluye, como caso particular la obtención del polinomio de independencia en poligrafos.

Antes de usar los resultados de [LM08], es necesario dar las definiciones básicas así como resultados preliminares, los cuales se mencionan a continuación

Definición 3.3. Sea G un grafo y \mathbb{F} un anillo conmutativo. Entonces un *peso* del grafo G es una pareja (α_G, β_G) definida por funciones

$$\alpha_G : V(G) \rightarrow \mathbb{F}, \quad \beta_G : E(G) \rightarrow \mathbb{F}.$$

1. Un *grafo pesado* es un grafo G junto con un peso (α_G, β_G)
2. Un *grafo no pesado* es un grafo G junto con pesos constante, $\alpha_G = \beta_G = 1$

De la definición anterior, cada vértice y cada arista del grafo G se provee de un valor sobre el anillo conmutativo \mathbb{F} . A partir de esto, se establece el peso de un morfismo entre un grafo pesado y no pesado.

Definición 3.4. Sean G un grafo no pesado y H un grafo pesado. Sea $f : G \rightarrow H$ un morfismo de grafo. El *peso de f* se define como

$$\omega(f) = \prod_{v \in V(H)} \alpha_H(f(v)) \prod_{\{u,v\} \in E(G)} \beta_H(f(u), f(v))$$

De la definición anterior al tomar diferentes grafos pesados con valores específicos de los pesos de vértices y aristas, se obtienen los siguientes ejemplos ([LM08]).

1. Para $H = K_q$, y $\alpha = \beta = 1$, el peso del morfismo f corresponderá a un q -coloreo propio ordinario.
2. Si $H = K_q$ con bucles sobre todos los vértices y los pesos se definen como: t^{-1} sobre los bucles, t sobre las aristas y 1 en los vértices, entonces $\omega(f)$ corresponde al modelo q -estado de Potts.
3. Si del ejemplo anterior se toma $q = 2$ y los pesos se definen como s sobre un vértice de H y s^{-1} sobre el otro vértice, se obtiene que $\omega(f)$ es el modelo de Ising con un campo externo.
4. Sea $H = K_2$ con un bucle sobre un vértice, se definen los pesos de las aristas como 1, el peso del bucle t y $\alpha = 1$. Si $t = 1$, el morfismo corresponde a los conjuntos independientes y, de manera general, para un valor de t se obtiene el llamado modelo de gas reticular de núcleo duro o *hard-core lattice gas model*.

Luego, observe que el peso de un morfismo de dos grafos proporciona conjuntos de vértices independientes, mas aún existe una biyección entre $\text{Hom}(G, H)$ y los conjuntos de vértices independientes del grafo G , donde $\text{Hom}(G, H)$ es el conjunto de todos los morfismos que existen entre los grafos G y H , donde H está definido como en el último ejemplo.

A continuación, se desea contar todos los pesos de los morfismos que existen entre los grafos G y H , para ello se define una nueva función

Definición 3.5. La *función de partición* del grafo no pesado G en el grafo pesado H se define como

$$Z(G, H) = \sum_{f \in \text{Hom}(G, H)} \omega(f)$$

donde $\text{Hom}(G, H) = \{f : G \rightarrow H \mid f \text{ es morfismo de grafo}\}$

De lo anterior, un caso particular consiste en calcular el polinomio de independencia de cualquier grafo, para ello se usa el siguiente resultado

Teorema 3.3. Sea G un grafo y H_0 el grafo pesado que se muestra en la Figura (3) cuyos pesos están definidos como

$$\alpha_0(1) = 1, \quad \alpha_0(2) = x, \quad \beta_0(u) = 1 \text{ para } u \in E(H_0)$$

entonces

$$Z(\mathcal{G}, H) = I(G; x)$$

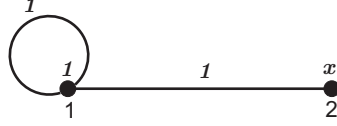


Figura 3. Grafo H_0

Prueba: Sea $f \in \text{Hom}(G, H_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \omega(f) &= \prod_{v \in V(G)} \alpha_H(f(v)) \prod_{\{u,v\} \in E(G)} \beta_H(f(u), f(v)) \\ \omega(f) &= \prod_{v \in V(G)} \alpha_H(f(v)) \cdot 1 \\ &= x^{|f^{-1}(2)|} \end{aligned}$$

donde $f^{-1}(2)$ es un conjunto de vértices independiente de G , ya que si $v, w \in f^{-1}(2)$ y $\{v, w\} \in E(G)$, entonces $\{f(v)f(w)\} \in E(H_0)$, es decir $\{2, 2\} \in E(H_0)$, lo cual no ocurre.

Recíprocamente, si I es un conjunto de vértices independiente de G , entonces se define

$$f : G \rightarrow H_0 \text{ por } f(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in I \\ 2 & \text{si } v \notin I \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned} Z(G, H) &= \sum_{f \in \text{Hom}(G, H_0)} \omega(f) \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq G \\ I \text{ independiente}}} x^{|I|} \\ &= I(G; x) \end{aligned}$$

□

El resultado anterior muestra que para calcular el polinomio de independencia de un grafo G , únicamente basta contar con todos los morfismos que existan entre el grafo G y el grafo pesado H_0 .

De aquí que, en lo referente a la suma de Zykov o poligrafos, se necesita contar con todos los morfismos que existan entre dos monografos y el grafo

H_0 , incluyendo a aquellas relaciones entre dichos monografos. De aquí que, se define lo siguiente.

Definición 3.6. Sean $f : G_1 \rightarrow H$, $g : G_2 \rightarrow H$ morfismos de grafos con H grafo pesado y $R : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ relación. Entonces

1. f, g son R -compatible si vRw entonces $f(v)g(w) \in E(H)$
2. Se define el peso de los morfismos f, g bajo la relación R por

$$\omega(f, R, g) = \prod_{vRw} \beta_H(\{f(v), g(w)\})$$

Otra notación para el peso de los morfismos f, g bajo una relación R es $\omega(R)$

Con lo anterior, y de la misma definición de peso de morfismos, se obtiene la siguiente propiedad importante, la cual es la base para el conteo de morfismos en un poligrafo, que incluye como caso particular el cálculo de los polinomios de independencia.

Proposición 3.7. Sean \mathcal{G}, H grafos, con H grafo pesado y \mathcal{G} poligrafo, sea además $f : \mathcal{G} \rightarrow H$, morfismo. Luego el peso del morfismos $\omega(f)$ es la única función que satisface lo siguiente:

1. Si $f : (\{v\}, \emptyset) \rightarrow H$ para H grafo pesado, entonces

$$\omega(f) = \alpha_H(f(v))$$

2. Sean $j_k : G_k \rightarrow H$ morfismo y $\Upsilon_k : G_k \rightarrow G_{k+1}$ relaciones binarias donde cada j_k son Υ_k -compatibles. Entonces

$$\omega(f) = \prod_k \omega(j_k) \omega(\Upsilon_k)$$

$$\text{donde } \omega(\Upsilon_k) = \prod_{u \Upsilon_k v} \beta_H(\{j_k(u), j_{k+1}(v)\})$$

Prueba: En efecto,

1. Se cumple de manera trivial
2. Sea $f = \mathcal{G} \rightarrow H$ morfismo de grafo, luego por definición se tiene

$$\omega(f) = \prod_{v \in V(\mathcal{G})} \alpha_H(f(v)) \prod_{\{u, v\} \in E(\mathcal{G})} \beta_H(\{f(u), f(v)\})$$

Observe que si $v \in V(\mathcal{G})$ entonces, por definición, $v \in \sqcup_i V(G_i)$. Lo mismo ocurre para cada $\{u, v\} \in E(\mathcal{G})$, es decir $\{u, v\} \in \sqcup_i E(G_i) \cup R$ donde R es el conjunto de aristas que se forman por cada Υ_i . Así

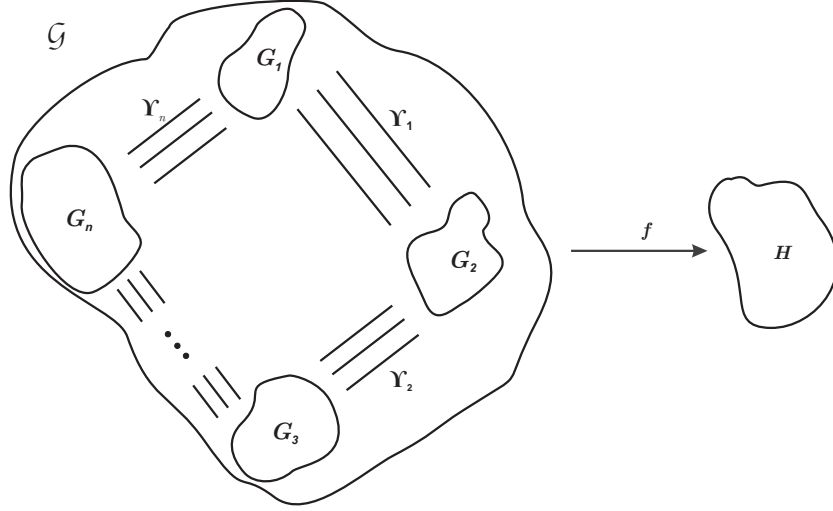


Figura 4. Poligrafo \mathcal{G} formado por los monografos G_1, \dots, G_n junto con sus relaciones $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_m$. Observe que el peso de f , $\omega(f)$ se define a partir del grafo \mathcal{G} y del grafo pesado H .

$$\omega(f) = \left[\left(\prod_{v \in V(G_1)} \alpha_H(f(v)) \cdots \prod_{v \in V(G_m)} \alpha_H(f(v)) \right) \right. \\ \left. \left(\prod_{\{u,v\} \in E(G_1)} \beta(f(v), f(u)) \cdots \prod_{\{u,v\} \in E(G_m)} \beta(f(u), f(v)) \right) \right. \\ \left. \left(\prod_{\{u,v\} \in R} \beta_H(f(u), f(v)) \right) \right]$$

Observe que $f(v) = j_k(v)$ para cada $v \in V(G_k)$, luego de aquí se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(f) &= \prod_k \omega(j_k) \prod_k \beta_H(j_k(u), j_{k+1}(v)) \\ &= \prod_k \omega(j_k) \omega(\Upsilon_k) \end{aligned}$$

□

Observe que, en la demostración de la proposición anterior, se descompone la función f como la unión de funciones j_k para poder obtener el resultado

deseado (ver Fig. (4) y (5)). Además f puede ser expresado como $\coprod_k j_k$, el cual representa el *coproducto* de los morfismos j_k .

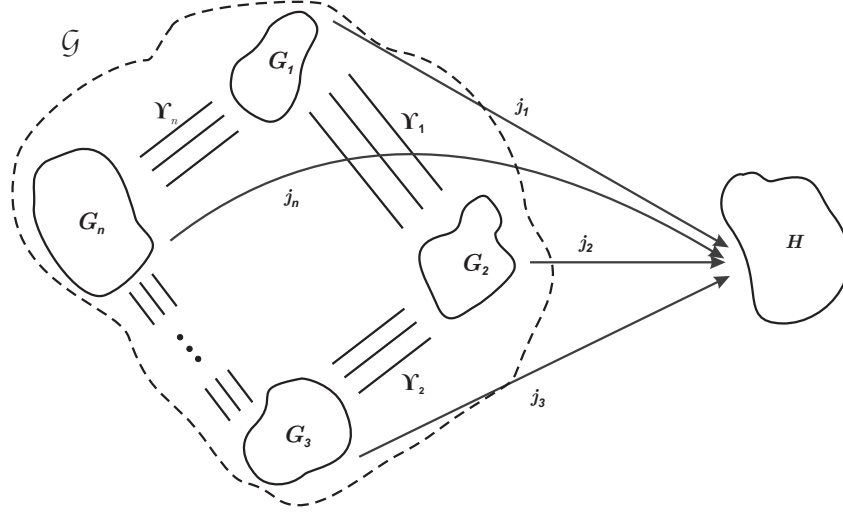


Figura 5. Descomposición del morfismo f como $\coprod_k j_k$, esta descomposición se logra sabiendo que el poligrafo \mathcal{G} es la unión ajena de los monografos G_i , para $i = 1, \dots, n$.

Como se menciona en [LM08], las matrices de transferencia son útiles para la computación dentro de una clase de grafos conocidos como poligrafos. Recordar que este tipo de grafos fue introducido por [BG86] donde se utilizaron las matrices de transferencia para hallar los polinomios de emparejamiento (*matching polynomials*).

Dado un poligrafo \mathcal{G} y un grafo pesado H , se puede calcular la función de partición $Z(\mathcal{G}, H)$ a partir de una sucesión de matrices de transferencia. Para ello, [LM08] define las matrices de transferencia a partir de los morfismos de grafos como se muestra a continuación.

Definición 3.7. Sea \mathcal{G} un poligrafo con monografos G_1, G_2, \dots, G_m y relaciones $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_m$. Se define la *matriz de transferencia* $M(i)$, con $i = 1, \dots, m$ como una matriz indizada por $\text{Hom}(G_i, H) \times \text{Hom}(G_{i+1}, H)$ mediante

$$M(i)_{f,g} = \begin{cases} 0 & \text{si } f, g \text{ no son } \Upsilon_i\text{-compatible} \\ \omega(f, \Upsilon_i, g)\omega(g) & \text{si } f, g \text{ son } \Upsilon_i\text{-compatible} \end{cases}$$

para $f \in \text{Hom}(G_i, H)$ y $g \in \text{Hom}(G_{i+1}, H)$.

Una forma alternativa de notación para el poligrafo, es la de expresar éste en términos de los monografos y de las relaciones que están definidas en cada monografo. Luego por la definición anterior, el poligrafo \mathcal{G} se denotaría por

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= G_1 \prod_{\Upsilon_1} G_2 \prod_{\Upsilon_2} \cdots \prod_{\Upsilon_m} G_1 \\ &= \prod_{i=1}^m (G_i, \Upsilon_i)\end{aligned}$$

A partir de esta definición, se puede hallar la función de partición $Z(\mathcal{G}, H)$ para \mathcal{G} un rotografo y H grafo pesado, lo cual se enuncia a continuación

Proposición 3.8. *Sea \mathcal{G} un poligrafo con monografos G_1, \dots, G_m no pesado y H grafo pesado. Entonces*

$$Z(\mathcal{G}, H) = \text{Tr}(M(1)M(2) \cdots M(m))$$

Prueba: En efecto, sean $f_i \in \text{Hom}(G_i, M)$ morfismos de grafos y sean $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_m$ relaciones definidas por $\Upsilon_i : V(G_i) \rightarrow V(G_{i+1})$ para $i = 1, \dots, m-1$ y $\Upsilon_m : V(G_m) \rightarrow V(G_1)$ donde además cada f_i, f_{i+1} es Υ -compatible. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}Z(\mathcal{G}, H) &= \sum_{f \in \text{Hom}(\mathcal{G}, H)} \omega(f) \\ &= \sum_{\substack{f_i \in \text{Hom}(G_i, H) \\ 1 \leq i \leq m}} \left(\prod_{k=1}^m f_k \right) \\ &= \sum_{\substack{f_i \in \text{Hom}(G_i, H) \\ 1 \leq i \leq m}} \left(\prod_{k=1}^m \omega(f_k) \omega(\Upsilon_k) \right) \\ &= \sum_{\substack{f_i \in \text{Hom}(G_i, H) \\ 1 \leq i \leq m}} \left(\prod_{k=1}^m \omega(f_k) \omega(f_k, \Upsilon_k, f_{k+1}) \right) \\ &= \sum_{\substack{f_i \in \text{Hom}(G_i, H) \\ 1 \leq i \leq m}} \left(\prod_{k=1}^m M^{(k)}_{f_k, f_{k+1}} \right)\end{aligned}$$

De la última igualdad, la matriz resultante estará indizada por los morfismos f_i , de aquí se obtiene que

$$Z(\mathcal{G}, H) = \text{Tr} \left(\prod_{i=1}^m M(i) \right)$$

□

Otro resultado importante, es cuando la última relación de un rotografo es vacía.

Corolario 3.2. *Sea \mathcal{G} un poligrafo con monografo G_1, \dots, G_m y relaciones $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_m$ con $\Upsilon_m = \emptyset$ relación vacía. Entonces*

$$Z(\mathcal{G}, H) = vM(1) \cdots M(m-1) \cdot \mathbf{1}$$

donde $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y v es un vector indizado por $\text{Hom}(G_1, H)$ y $v_f = \omega(f)$.

Prueba: En efecto, por el Teorema 3.8

$$Z(\mathcal{G}, H) = \text{Tr}(M(1) \cdots M(m-1)M(m))$$

donde $(M(m)_{f,g}) = M(m)$ donde $f \in \text{Hom}(G_m, H)$, $g \in \text{Hom}(G_1, H)$, además en tal caso f, g son \emptyset -compatible, lo cual es cierto. De aquí que la entrada $f - g$ no es cero y por definición

$$\begin{aligned} M(m)_{f,g} &= \omega(f, \emptyset, g)\omega(g) \\ &= \prod_{u \in \emptyset} \beta_H(f(u), g(v))\omega(g) \\ &= \omega(g) \end{aligned}$$

Luego

$$M(m) = \begin{pmatrix} \omega(g_1) & \omega(g_2) & \dots & \omega(g_k) \\ \omega(g_1) & \omega(g_2) & \dots & \omega(g_k) \\ & & \vdots & \\ \omega(g_1) & \omega(g_2) & \dots & \omega(g_k) \end{pmatrix}$$

Así

$$Z(\mathcal{G}, H) = \text{Tr} \left(M(1) \cdots M(m-1) \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_k \\ b_1 & \dots & b_k \\ & \vdots & \\ b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix} \right)$$

donde $b_i = \omega(g_i)$ para $i = 1, \dots, k$. Por otro lado se tiene la siguiente propiedad

$$\text{Tr} \left(A \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ a_1 & \dots & a_k \\ \vdots & & \\ a_1 & \dots & a_k \end{pmatrix} \right) = (a_1 \dots a_k) A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

De lo anterior se tiene que

$$Z(\mathcal{G}, H) = v(M(1) \dots M(m-1)) \cdot \mathbf{1}$$

donde v es un vector formado con los pesos del morfismo de G_1 a H , el cual corresponde a la primera fila de la matriz de transferencia $M(1)$. \square

Una observación importante que hay que destacar del Teorema (3.8) y del Corolario (3.2) es que estos resultados son los mismos y se obtienen al realizar el cálculo del polinomio de independencia en sumas de Zykov abiertas o cerradas.

Cabe mencionar que lo anterior es un caso particular de la teoría desarrollada [LM08]. Mas aún, este mismo trabajo contempla un procedimiento de compresión de matrices, que es importante al momento de obtener las funciones generatrices de los conteos de morfismos. A continuación se realiza un breve resumen de esta teoría, además de elaborar ejemplos sencillos.

4. Compresión de matrices de transferencia

La idea principal para realizar la compresión de las matrices de transferencia, es la de descomponer dichas matrices en bloques. Estos bloques dependen del grupo producto $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)$, donde $\text{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ es un isomorfismo de grafo}\}$ y $\text{Aut}(H)$ cumple con la misma definición que $\text{Aut}(G)$, sólo que estos morfismos deben preservar los pesos del grafo H . Un morfismo se dice que preserva el peso si cumple con la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea H un grafo pesado, con pesos (α_H, β_H) , sea además $h : H \rightarrow H$ un morfismo de grafo. Se dice que h *preserva el peso* si

$$\begin{aligned} \alpha_H(h(v)) &= \alpha_H(v), \quad \text{para todo } v \in V(H) \\ \beta_H(h(\{v, w\})) &= \beta_H(\{v, w\}), \quad \text{para todo } \{v, w\} \in E(H) \end{aligned}$$

El grupo producto $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)$ establece una acción por la izquierda sobre los $\text{Hom}(G, H)$. Esta propiedad es de gran utilidad para descomponer una matriz por bloques.

Proposición 3.9. *Sea G un grafo no pesado y H un grafo pesado. Entonces el grupo $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)$ actúa a la izquierda sobre $\text{Hom}(G, H)$ mediante*

$$(h, g) \circ f = h \circ f \circ g^{-1}$$

para $f : G \rightarrow H$ morfismo y $(h, g) \in \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)$.

Prueba: En efecto

1.

$$\begin{aligned} (\text{Id}_H, \text{Id}_G) \circ f &= \text{Id}_h \circ f \circ \text{Id}_G^{-1} \\ &= f \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} ((h_2, g_2)(h_1, g_1)) \circ f &= (h_2 \circ h_1, g_2 \circ g_1) \circ f \\ &= (h_2 \circ h_1) \circ f \circ (g_2 \circ g_1)^{-1} \\ &= (h_2 \circ h_1) \circ f \circ (g_1^{-1} \circ g_2^{-1}) \\ &= h_2 \circ (h_1 \circ f \circ g_1^{-1}) \circ g_2^{-1} \\ &= h_2 ((h_1, g_1) \circ f) \circ g_2^{-1} \\ &= (h_2, g_2)((h_1, g_1) \circ f) \end{aligned}$$

□

La acción definida anteriormente induce una relación de equivalencia (\sim) sobre $\text{Hom}(G, H)$. En efecto, sean $f_1, f_2 : G \rightarrow H$ morfismos de grafos. Entonces $f_1 \sim f_2$ sí y sólo si existe $(h, g) \in \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)$ tal que $f_1 = (h, g) \circ f_2$. Así, $\text{Hom}(G, H)$ se divide en clases llamadas *órbitas de la acción del grupo* $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)$, es decir

$$\text{Hom}(G, H) = \bigcup_{i=1}^k \text{O}(f_i)$$

donde $\text{O}(f_i) = \{(h, g) \circ f_i \mid (h, g) \in \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)\}$. Estas órbitas proporcionan bloques en las matrices de transferencia.

Luego entonces, para que una matriz se pueda descomponer por bloques, se deben definir particiones sobre las filas y las columnas que además deben cumplir con una propiedad particular para cada elemento de las particiones.

Definición 3.9. Sea A una matriz de $(n \times m)$. Una *partición equitativa* de A es un par $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ donde $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_r\}$ es partición de $\{1, \dots, n\}$ y $\mathcal{Q} = \{J_1, \dots, J_s\}$ es partición de $\{1, \dots, m\}$ tales que, para $i_1, i_2 \in I_k$

$$\sum_{l \in J_j} A_{i_1, l} = \sum_{l \in J_j} A_{i_2, l}, \text{ para } k = 1, \dots, r \text{ } j = 1 \dots, s.$$

De la definición y de las proposiciones mencionadas anteriormente la acción de $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G)$ induce particiones equitativas en las matrices de transferencia $(M(i))$, bajo ciertas condiciones, las cuales se menciona a continuación

Definición 3.10. Sean G_1, G_2 grafos y Υ relación definida en $V(G_1), V(G_2)$. Sea además $\varphi : N_1 \rightarrow N_2$ morfismo de grupo donde N_1, N_2 son subgrupos de $\text{Aut}(G_1)$ y $\text{Aut}(G_2)$, respectivamente. Se dice que Υ es una relación *invariante* o φ -invariante si para todo $g_1 \in \text{Aut}(G_1)$ se tiene que si $u\Upsilon v$ implica que $g_1(u)\Upsilon\varphi(g_1)v$, para $u \in V(G_1)$ y $v \in V(G_2)$.

Teorema 3.4 (Compresión de transferencia). *Sean G_1, G_2 grafos no pesados, H grafo pesado y M la matriz de transferencia relativa a G_1, G_2 y relación $\Upsilon : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$. Además sean N_1, N_2 subgrupos de $\text{Aut}(G_1), \text{Aut}(G_2)$ respectivamente, S subgrupo de H y $\varphi : N_1 \rightarrow N_2$ morfismo de grupos. Si Υ es φ -invariante entonces las órbitas de $S \times N_1$ y $S \times N_2$ actuando sobre $\text{Hom}(G_1, H)$ y $\text{Hom}(G_2, H)$ inducen una partición equitativa de M .*

Prueba: En efecto, sean $\phi \in \text{Hom}(G_1, H)$, $\psi \in \text{Hom}(G_2, H)$ y $g_1 \in \text{Aut}(G_1)$. Además sea $O(\psi) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ la órbita de ψ bajo la acción del grupo $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(G_2)$. De esto último, se reescriben las órbitas por $O(\psi) = \{h\gamma_1\varphi(g_1), h\gamma_2\varphi(g_1), \dots, h\gamma_m\varphi(g_1)\}$. De este conjunto se toma un subconjunto cuyos elementos sean morfismos Υ -compatible con $h\phi g_1$, supongase que dicho subconjunto es $\{h\gamma_{j_1}\varphi(g_1), h\gamma_{j_2}\varphi(g_1), \dots, h\gamma_{j_s}\varphi(g_1)\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_j M_{h\phi g_1, \gamma_j} &= \sum_j M_{h\phi g_1, h\gamma_j\varphi(g_1)} \\
&= \sum_k M_{h\phi g_1, h\gamma_{j_k}\varphi(g_1)} \\
&= \sum_k \prod_{v\Upsilon w} \beta_H(h\phi g_1(v), h\gamma_{j_k}\varphi(g_1)(w)) \omega(h\gamma_{j_k}\varphi(g_1)) \\
&= \sum_k \prod_{v\Upsilon w} \beta_H(h\phi(v), h\gamma_{j_k}(w)) \omega(h\gamma_{j_k}) \\
&= \sum_j M_{\phi, \gamma_j}
\end{aligned}$$

□

Definición 3.11. Sea $A = (a_{ij})$ matriz $n \times m$ con entradas en un anillo conmutativo \mathbb{F} con unidad. Sea $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_r\}$ partición de $\{1, \dots, n\}$ y $\mathcal{Q} = \{J_1, \dots, J_s\}$ partición de $\{1, \dots, m\}$. Se dice que A es compresible a lo largo de \mathcal{P} y \mathcal{Q} si para $k_1, k_2 \in I_l$ se cumple que

$$\sum_{l \in J_j} a_{k_1, l} = \sum_{l \in J_j} a_{k_2, l}$$

para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$. Si $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ se dice que A es compresible a lo largo de \mathcal{P} .

Luego, si existen particiones equitativas de filas y columnas de una matriz, entonces la matriz es compresible.

Definición 3.12. Si A cumple con la Definición 3.11, se puede definir la compresión de A como la siguiente matriz $r \times s$ denotado por C_A :

$$(C_A)_{ij} = \sum_{l \in J_j} a_{k, l}$$

para todo $k \in I_i$ con $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$.

Una propiedad interesante de la compresión de matrices y parte fundamental de la obtención de la función de partición es que, el producto de matrices compresibles, es compresible

Proposición 3.10. Sea A matriz $n \times m$ compresible a lo largo de \mathcal{P} y \mathcal{Q} y B matriz $m \times o$ compresible a lo largo de \mathcal{Q} y \mathcal{R} con

$$\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_p\}, \quad \mathcal{Q} = \{J_1, \dots, J_q\}, \quad \mathcal{R} = \{K_1, \dots, K_r\}$$

Entonces, si $k \in I_i$ arbitrario

$$\sum_{l \in K_j} (AB)_{k, l} = (C_A C_B)_{ij}$$

con $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq r$. En otras palabras, AB es compresible a lo largo de \mathcal{P} y \mathcal{R} y $C_{AB} = C_A C_B$.

Prueba: En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in K_j} (AB)_{ij} &= \sum_{l \in K_j} \sum_{h=1}^m A_{k,h} B_{h,l} \\
&= \sum_{l \in K_j} \sum_{u=1}^q \sum_{h \in J_u} A_{k,h} B_{h,l} \\
&= \sum_{u=1}^q \sum_{h \in J_u} A_{k,h} \sum_{l \in K_j} B_{h,l} \\
&= \sum_{u=1}^q (C_A)_{i,u} (C_B)_{u,j} \\
&= (C_A C_B)_{ij}
\end{aligned}$$

Sea $k_1, k_2 \in I_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in K_j} (AB)_{k_1,l} &= (C_A C_B)_{i,j} \\
&= \sum_{l \in K_j} (AB)_{k_2,l}
\end{aligned}$$

con $i \in I_1$ y $j \in K_j$. Luego AB es compresible a lo largo de \mathcal{P} y \mathcal{R} y además $(C_{AB}) = (C_A C_B)_{ij}$. \square

Un resultado más general del que se enunció anteriormente, es el que menciona que, la compresión de un producto de matrices es el producto de las correspondientes compresiones.

Corolario 3.3. *Sea \mathcal{P} una partición de $\{1, \dots, n\}$ y $\zeta(\mathcal{P})$ el conjunto de matrices compresibles a lo largo de \mathcal{P} . Entonces $\zeta(\mathcal{P})$ es una F -álgebra de matrices, además la función $C : \zeta(\mathcal{P}) \rightarrow M_r(F)$ definida por*

$$C(A) = C_A$$

es un morfismo de álgebras.

Así, se muestra que, al tener un poligrafo \mathcal{G} con sus respectivas matrices de transferencia, si cada matriz es compresible entonces únicamente se trabaja con las compresiones de las matrices.

Corolario 3.4. *Sea A_i matriz compresible a lo largo de \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_{i+1} con $i = 1, \dots, m-1$ (suma en módulo m) donde*

$$\mathcal{P}_1 = \{I_1, \dots, I_r\} \quad \mathcal{P}_m = \text{partición de } \{1, \dots, p\}$$

Sea v tal que es constante sobre cada I_i (Si $a, b \in I_i$, entonces $v_a = v_b$, para toda i) y $(v'_i) = |I_i|v_i$, con $i = 1, \dots, r$. Entonces

$$v \cdot A_1 \cdot A_2 \cdots A_{m-1} \cdot \mathbf{1} = v' \cdot C_{A_1} \cdot C_{A_2} \cdots C_{A_{m-1}} \cdot \mathbf{1}$$

Prueba: En efecto, sin pérdida de generalidad suponga el caso de $m = 2$, luego

$$\begin{aligned} v \cdot A \cdot \mathbf{1} &= \sum_{i=1}^n v_i \sum_{l=1}^p a_{i,l} \\ &= \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i \in I_\alpha} v_i \sum_{\beta=1}^s \sum_{l \in J_\beta} a_{i,l} \\ &= \sum_{\alpha=1}^r |I_\alpha| v_i \sum_{\beta=1}^s (C_A)_{\alpha,\beta} \\ &= v' \cdot C_A \cdot \mathbf{1}^t \end{aligned}$$

□

El último resultado es de gran importancia al momento de obtener los polinomios de independencia de polígrafos, siempre y cuando las matrices sean compresibles.

4.1. Ejemplos. Ahora se aplicará estos resultados en algunos ejemplos. Para simplificar los cálculos se emplearán dos fasciografos que fueron descritos en el trabajo de [BG86], es decir rotografos donde la última relación es la relación vacía.

4.1.1. Polímero 1. Sea \mathcal{G} el fasciografo con monografo $G = P_4$ y relación $\Upsilon : V(G) \rightarrow V(G)$ definido por $\Upsilon = \{(2, 1), (3, 4)\}$.

Se desea calcular la función partición $Z(\mathcal{G}, H)$ donde H es un grafo pesado, el cual fue definido en el Teorema (3.3). Para ello se debe obtener las matrices de transferencia, sin embargo únicamente se calcula una matriz de transferencia dado que todas las relaciones y monografos son los mismos. Así la matriz y vector v están dadas por:

$$v = (1 \quad t \quad t \quad t^2 \quad t^2 \quad t^2 \quad t \quad t)$$

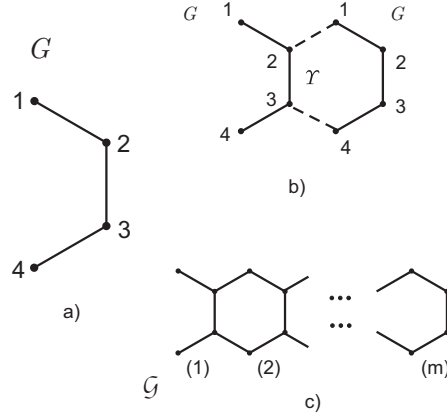


Figura 6. Polímero. a) Monografo G . b) Definición de la relación Υ . c) Fasciagrafo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\ 1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\ 1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\ 1 & t & 0 & t^2 & 0 & 0 & t & t \\ 1 & 0 & t & 0 & t^2 & 0 & t & t \\ 1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\ 1 & 0 & t & 0 & t^2 & 0 & t & t \\ 1 & t & 0 & t^2 & 0 & 0 & t & t \end{pmatrix}$$

Luego, por el resultado del Corolario (3.2) se tiene que para m copias del monografo G , la función de partición está dada por:

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{G}, H) &= v \left(\prod_{i=1}^{m-1} M(i) \right) \cdot \mathbb{1} \\ (7) \quad &= v M^{m-1} \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{G} = \prod_{i=1}^m (G, \Upsilon)$.

Recordar que todas las matrices son iguales, de aquí que $M(i) = M$ para $i = 1, \dots, m-1$. Además, la serie de independencia del fasciagrafo se calcula mediante la siguiente sucesión de fasciagrafo

$$(8) \quad S_0 = G; \quad S_1 = G \prod_{\Upsilon} G; \quad \dots \quad S_k = \prod_{i=1}^{k+1} (G, \Upsilon)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(S_*; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} I(S_k; t) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} Z(S_k, H) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (v M^k \mathbf{1}) z^k \\
(9) \qquad &= v (\text{Id} - z M)^{-1} \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Así, la última expresión que se obtuvo, es una función generatriz para la obtención del fasciagrafo \mathcal{G} . Note además que esta expresión es mucho más simple que la obtenida en Corolario (3.1).

Ahora se verifica si la matriz de transferencia M es compresible. Para ello se busca el grupo $\text{Aut}(G)$, el cual es:

$$\begin{aligned}
\text{Aut}(G) &= \{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)\} \\
&= \{e, r\}
\end{aligned}$$

que corresponde al elemento neutro e y el elemento reflexión r . A partir de esto se toma un subgrupo N_1 y N_2 de $\text{Aut}(G)$ y ver si Υ es φ -compatible, para un morfismo de grupo φ . De aquí que se toma $N_1 = N_2 = \text{Aut}(G)$ y el morfismo de grupos, el morfismo identidad.

De lo anterior se tiene las siguientes órbitas

$$O = \{\{\emptyset\}, \{\{1\}, \{4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}\}, \{\{2\}, \{3\}\}\}$$

Esto lleva a que la dimensión de la matriz de transferencia se reduce de 8×8 a 5×5 . Luego los bloques de la matriz queda como

$$M = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc}
1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\
1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\
1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\
\hline
1 & t & 0 & t^2 & 0 & 0 & t & t \\
1 & 0 & t & 0 & t^2 & 0 & t & t \\
\hline
1 & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t & t \\
\hline
1 & 0 & t & 0 & t^2 & 0 & t & t \\
1 & t & 0 & t^2 & 0 & 0 & t & t
\end{array} \right)$$

Así

$$C_M = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 & t^2 & 2t \\ 1 & 2t & 2t^2 & t^2 & 2t \\ 1 & t & t^2 & 0 & 2t \\ 1 & 2t & 2t^2 & t^2 & 2t \\ 1 & t & t^2 & 0 & 2t \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene que la función de partición para el poligrafo \mathcal{G} queda expresado como

$$Z(\mathcal{G}, H) = v' C_M^{m-1} \cdot \mathbb{1}$$

donde $v' = (1 \ 2t \ 2t^2 \ t^2 \ 2t)$ Más aún, la serie de independencia de la sucesión de grafos S_* queda como

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(S_*; z) &= v' (\text{Id} - z C_M)^{-1} \cdot \mathbb{1} \\ &= \frac{(t+1)(t^3 z + t^2 z - 3t - 1)}{t^2(t+1)^2 z^2 - (2t^2 + 4t + 1)z + 1} \end{aligned}$$

el cual proporciona una ecuación de recurrencia de orden dos, el cual está dado por

$$p_n(t) = (2t^2 + 4t + 1) p_{n-1}(t) - t^2 (t+1)^2 p_{n-2}, \text{ para } n \geq 2$$

cuyas condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 3t^2 + 4t + 1 \\ p_1(t) &= 5t^4 + 18t^3 + 20t^2 + 8t + 1. \end{aligned}$$

Observe que, al realizar la compresión de una matriz compresible, se reducen las operaciones necesarias para calcular la función de partición y por tanto la función generatriz de la serie de independencia. En este caso, la dimensión de la matriz se redujo en 3 y esto depende exclusivamente de grupo de $\text{Aut}(G)$, además de que la relación Υ sea φ -compatible.

4.1.2. Polímero 2. Ahora se utilizará la teoría expuesta en esta sección para obtener la función de partición del poligrafo \mathcal{G} y estudiar si las matrices de transferencia son compresibles, y en caso de serlo, obtener la matriz compresible.

Sea \mathcal{G} el fasciagrafo con monografo $G = C_5$ y relación $\Upsilon : V(G) \rightarrow V(G)$ definida por $\Upsilon = \{(2, 1), (3, 5)\}$ (ver Fig. (7))

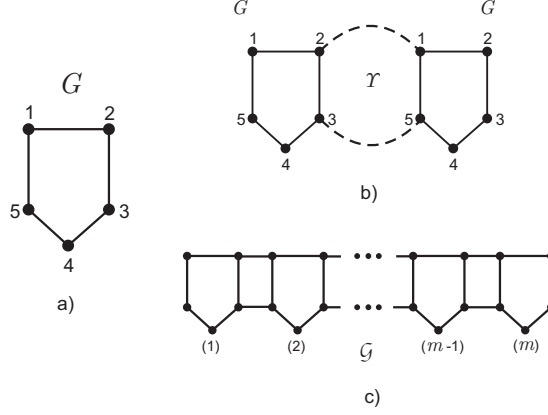


Figura 7. a) Monografo b) Definición de la relación Υ c) Fasciografo

Como en el ejemplo anterior, se desea encontrar la función de partición del poligrafo \mathcal{G} con m copias del monografo G . Entonces

$$Z(\mathcal{G}, H) = v M^{m-1} \cdot \mathbf{1}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ 1 & 0 & t & t & t & t & 0 & 0 & 0 & t^2 & t^2 & t^2 & 0 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^3 \\ 1 & 0 & t & t & t & t & 0 & 0 & 0 & t^2 & t^2 & t^2 & 0 \\ 1 & 0 & t & t & t & t & 0 & 0 & 0 & t^2 & t^2 & t^2 & 0 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t & t & t & t & t & t^2 & t^2 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v = (1 \quad t \quad t \quad t \quad t \quad t \quad t^2 \quad t^2 \quad t^2 \quad t^2 \quad t^2 \quad t^2 \quad t^3)$$

Por otra parte, la serie de independencia de la serie de grafos definida como en la Ec. (8) está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(S_*, z) &= v (\text{Id} - z M)^{-1} \cdot \mathbf{1} \\ &= -\frac{N(t, z)}{D(t, z)} \end{aligned}$$

donde

$$N(t, z) = 2t^7 z^2 + 3t^6 z^2 + t^5 z^2 + 4t^4 z + t^3(4z - 1) + t^2(z - 6) - 5t - 1$$

y

$$D(t, z) = -(5t^2 + 5t + 1)z + (2t^2 + 3t + 1)t^5 z^3 + (-t^5 + 3t^4 + 4t^3 + t^2)z^2 + 1$$

La función $D(t, z)$ proporciona la ecuación de recurrencia de orden 3, cuyos valores iniciales son

$$p_1(t) = t^3 + 6t^2 + 5t + 1$$

$$p_2(t) = 5t^5 + 31t^4 + 52t^3 + 35t^2 + 10t + 1$$

$$p_3(t) = t^8 + 26t^7 + 160t^6 + 380t^5 + 437t^4 + 268t^3 + 89t^2 + 15t + 1$$

Observe que, para todo fasciagrafo \mathcal{G} , la función de partición y la serie de independencia está dada por las Ec. (7) y (9), respectivamente.

Se verificará si la matriz M es o no compresible, para ello sea $\text{Aut}(G)$ el grupo de automorfismos del grafo G dado por

$$\text{Aut}(G) = \left\{ (1, 2, 3, 4, 5), (1, 5, 4, 3, 2), (2, 1, 5, 4, 3), (2, 3, 4, 5, 1), (3, 2, 1, 5, 4), \right. \\ \left. (3, 4, 5, 1, 2), (4, 3, 2, 1, 5), (4, 5, 1, 2, 3), (5, 1, 2, 3, 4), (5, 4, 3, 2, 1) \right\}$$

Luego, al observar cada una de las órbitas con cada elemento de $\text{Aut}(G)$, se verifica que Υ no es φ -compatible, para φ morfismo de subgrupos de $\text{Aut}(G)$. De aquí que la matriz no es compresible.

En este apartado se discutieron las formas de obtener los polinomios de independencia de sumas de Zykov o poligrafos utilizando el método de matrices de transferencia. Como se observó, el caso más sencillo fue el de calcular el polinomio de independencia en fasciagrafos o rotografos, siendo los primeros en donde las matrices de transferencias pueden llegar a ser compresible. En el segundo caso, hasta el momento no existe teoría alguna para realizar alguna compresión.

El primer método que se uso para obtener las series de independencia de sumas abiertas y cerradas, involucra el cálculo de cuatro matrices de transferencia, siendo que en el segundo caso únicamente necesite el cálculo de una sola matriz.

Resultados

En esta parte se discutirán los resultados obtenidos de dos grafos encontrados en la literatura. El grafo de Goldberg G_{2n+1} y el grafo generalizado de Petersen $P(m, 4)$ para $n > 1$ y $m > 12$.

1. Grafo de Goldberg

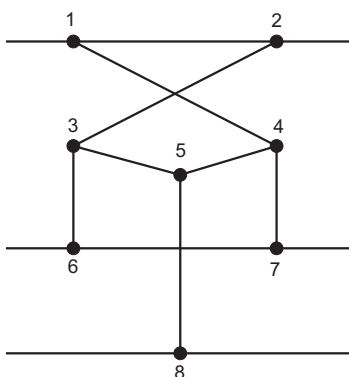


Figura 1. Grafo B

Otra aplicación del método de matrices de transferencia es el obtener la *serie de independencia* del grafo de Goldberg G_k , la cual se define como sigue (según [Gol81]): Sea $k \geq 5$ número impar, el grafo de Goldberg se forma a partir de k copias B_1, B_2, \dots, B_k del grafo B (que se muestra en la Fig. (1)) cuyas aristas se forman a partir de $\{2_i 1_{i+1}, 7_i 6_{i+1}, 8_i 8_{i+1}\}$ para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, donde los índices son sumas módulo k . Por ejemplo, para obtener el grafo G_5 , se deben realizar 5 copias del grafo B y unir las aristas correspondientes (ver Fig. (2))

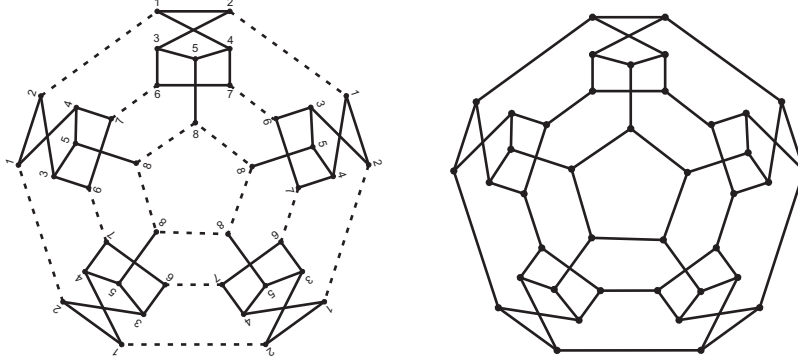


Figura 2. Grafo de Goldberg G_5 . A la izquierda se presentan 5 copias del grafo B junto con las nuevas aristas que se agregan. A la derecha el resultado de la construcción

Para hacer uso del método de transferencia, es necesario definir un monografo para la construcción del k -ésimo grafo de Goldberg. De la propia definición de [Gol81] se toma como monografo H el grafo B cuya relación $R : H \rightarrow H$ está definida por $R = \{(2, 1), (7, 6), (8, 8)\}$. Una vez definida las relaciones entre los monografos, se verifica que la función generatriz para la obtención de los polinomios de independencia estará dado por:

$$\mathbb{I}(S_*; z) = \text{Tr} \left(M (\text{Id} - z M^2)^{-1} \right)$$

donde M es la matriz de transferencia del poligrafo $B +_R B$ y S_* es la colección de poligrafos definidos por

$$\begin{aligned} S_0 &= B, & S_1 &= B \oplus_R B \oplus_R B \oplus_R B, \\ S_2 &= B \oplus_R B \oplus_R B \oplus_R B \oplus_R B \oplus_R B, & \dots \end{aligned}$$

Así, usando resultado del Teorema 3.2 se obtiene el resultado mencionado anteriormente y, por tanto, se obtiene la ecuación de recurrencia de octavo grado que se muestra en la Ec. (10):

$$(10) \quad \begin{aligned} p_n(t) &= \alpha_1(t)p_{n-1}(t) + \alpha_2(t)p_{n-2}(t) + \alpha_3(t)p_{n-3}(t) + \alpha_4(t)p_{n-4}(t) \\ &\quad + \alpha_5(t)p_{n-5}(t) + \alpha_6(t)p_{n-6}(t) + \alpha_7(t)p_{n-7}(t) + \alpha_8(t)p_{n-8}(t) \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_1(t) = 1 + 16t + 97t^2 + 282t^3 + 411t^4 + 286t^5 + 82t^6 + 8t^7$$

$$\alpha_2(t) = -t^2 \left(1 + 26t + 291t^2 + 1842t^3 + 7294t^4 + 18890t^5 + 32517t^6 \right. \\ \left. + 37090t^7 + 27483t^8 + 12736t^9 + 3453t^{10} + 476t^{11} + 24t^{12} \right)$$

$$\alpha_3(t) = t^6 \left(2 + 60t + 803t^2 + 6332t^3 + 32744t^4 + 117012t^5 + 296803t^6 \right. \\ \left. + 540652t^7 + 707866t^8 + 660578t^9 + 431700t^{10} + 192046t^{11} \right. \\ \left. + 55687t^{12} + 9816t^{13} + 920t^{14} + 32t^{15} \right)$$

$$\alpha_4(t) = -t^{10}(1+2t) \left(1 + 32 + 463t^2 + 4004t^3 + 23064t^4 + 93422t^5 \right. \\ \left. + 274128t^6 + 592446t^7 + 951521t^8 + 1140750t^9 + 1022373t^{10} \right. \\ \left. + 683402t^{11} + 336950t^{12} + 118920t^{13} + 28248t^{14} + 4052t^{15} \right. \\ \left. + 292t^{16} + 8t^{17} \right)$$

$$\alpha_5(t) = t^{16}(1+2t)^2 \left(2 + 56 + 705t^2 + 5278t^3 + 26211t^4 + 91274t^5 \right. \\ \left. + 229913t^6 + 426168t^7 + 585486t^8 + 595036t^9 + 442064t^{10} \right. \\ \left. + 234330t^{11} + 85067t^{12} + 19726t^{13} + 2556t^{14} + 132t^{15} \right)$$

$$\alpha_6(t) = -t^{22}(1+t)^2(1+2t)^2 \left(1 + 24t + 256t^2 + 1602t^3 + 6549t^4 \right. \\ \left. + 18468t^5 + 37079t^6 + 54126t^7 + 58382t^8 + 47060t^9 + 28254t^{10} \right. \\ \left. + 12194t^{11} + 3489t^{12} + 572t^{13} + 40t^{14} \right)$$

$$\alpha_7(t) = -t^{30}(1+t)^5(1+2t)^3 \left(-1 - 15t - 91t^2 - 283t^3 - 471t^4 - 395t^5 \right. \\ \left. - 129t^6 + 3t^7 + 6t^8 \right)$$

$$\alpha_8(t) = -t^{40}(1+t)^8(1+2t)^4$$

cuyas condiciones iniciales estan dadas por

$$p_1(t) = 1 + 24t + 240t^2 + 1303t^3 + 4197t^4 + 8235t^5 + 9727t^6 \\ + 6588t^7 + 2325t^8 + 369t^9 + 24t^{10}$$

$$p_2(t) = 1 + 40t + 720t^2 + 7720t^3 + 55020t^4 + 275437t^5 + 998090t^6 \\ + 2658905t^7 + 5236215t^8 + 7602870t^9 + 8055428t^{10} + 6112165t^{11} \\ + 3226145t^{12} + 1135055t^{13} + 250195t^{14} + 31651t^{15} + 2100t^{16} + 80t^{17}$$

$$p_3(t) = \dots$$

los siguientes polinomios $p_3(t), p_4(t), p_5(t), p_6(t), p_7(t)$ y $p_8(t)$ que corresponden a las condiciones iniciales tienen grado 24, 31, 38, 45, 52 y 59, respectivamente, los cuales no pudieron ser incluidos en este apartado debido al gran número de términos que tiene y de los coeficientes de los mismos.

Con base a lo anterior se obtienen fórmulas para el número de independencia así como el coeficiente principal y la evaluación de los polinomios de independencia en $t = -1$, el cual se enuncia a continuación.

Teorema 4.1. *Sea $p_n(t) = I(G_{2n+1}, t)$ el polinomio de independencia del grafo de Goldberg G_{2n+1} , con $n \geq 1$. Sea $\alpha(n) = \partial(p_n(x))$ y c_n el número de independencia y el coeficiente principal del polinomio de independencia del grafo G_{2n+1} . Entonces*

1. Para todo $n \geq 1$ se cumple que

$$(11) \quad \alpha(n) = 7n + 3$$

2. El n -ésimo coeficiente principal c_n se obtiene

$$(12) \quad c_n = 2^{n+2}(1 + 2n)$$

3. Para todo $n \geq 1$,

$$(13) \quad p_n(-1) = 2^{n+1} \left(\cos \frac{\pi}{2}n - \sin \frac{\pi}{2}n \right) - 1$$

Prueba: En efecto, sea $p_n(t)$ la ecuación de recurrencia de los polinomios de independencia del grafo de Goldberg G_{2n+1} en variable t dado por Ec. (10).

Las Ec. (11) y (12) se demostrarán usando inducción matemática. Sea $n = 5$, luego

$$\alpha(5) = 38, \quad c_5 = 2^{(5+2)}(1 + (2)(5)) = 1408$$

el cual se satisface. Ahora suponga que se cumple para todo $k \leq n - 1$ y mostremos el caso n . Para ello, observando la Ec. (10), se tiene que

$$\begin{aligned} c_n &= 8c_{n-1} - 24c_{n-2} + 32c_{n-3} - 16c_{n-4} \\ &\quad + 528c_{n-4} - 160c_{n-5} - 48c_{n-6} - 16c_{n-7} \end{aligned}$$

Sin embargo, los últimos 4 términos de la ecuación anterior no aporta en nada al valor del coeficiente c_n . Esto debido a que en estos términos los exponentes correspondientes a $\alpha_5(t), \alpha_6(t), \alpha_7(t)$ y $\alpha_8(t)$ no igualan a $\alpha(n)$,

ya que

$$\begin{aligned}
 \alpha(n) &= 7 + \alpha(n-1) = \dots \\
 &= 35 + \alpha(n-5) \\
 &= 42 + \alpha(n-6) \\
 &= 49 + \alpha(n-7) \\
 &= 56 + \alpha(n-8)
 \end{aligned}$$

lo cual observando $\alpha_5(t)$, el exponente del polinomio es $33 + \alpha(n-5)$ y este no iguala al exponente de $\alpha(n)$, lo mismo pasa para los demás términos $\alpha_6(t)$, $\alpha_7(t)$ y $\alpha_8(t)$. Luego la ecuación queda como

$$(14) \quad c_n = 8c_{n-1} - 24c_{n-2} + 32c_{n-3} - 16c_{n-4}$$

cuyas condiciones iniciales están dadas por:

$$\begin{array}{ll}
 c_1 = 24 & c_2 = 80 \\
 c_3 = 224 & c_4 = 576
 \end{array}$$

Por hipótesis de inducción, c_{n-1} , c_{n-2} , c_{n-3} y c_{n-4} se cumplen, luego

$$c_n = 2^{n+2}(1 + 2n)$$

Por otra parte, observe que para $k = n-1$, se satisface $\alpha(k)$, de aquí que:

$$\begin{aligned}
 \alpha(n) &= 7 + \alpha(n-1) \\
 &= 7 + (7(n-1) + 3) \\
 &= 7n + 3
 \end{aligned}$$

Finalmente, para mostrar la Ec. (10) basta evaluar en $t = -1$ obteniendo la siguiente ecuación de recurrencia con coeficientes constantes.

$$(15) \quad \begin{aligned} p_n(-1) &= -p_{n-1}(-1) - 3p_{n-2}(-1) - 3p_{n-3}(-1) \\ &\quad + 4p_{n-4}(-1) + 4p_{n-5}(-1) \end{aligned}$$

Resolviendo esta Ec. (15) se demuestra la Ec. (13) □

2. Grafo de Petersen $P(m, 4)$

En este apartado se obtendrá; el número de independencia, los coeficientes principales y el comportamiento del sistema en $t = -1$ del grafo de Petersen $P(m, 4)$. Para ello se utilizará la suma de Zykov cerrada, tomando ciertos patrones para obtener los grafos de Petersen, y así, hallar ecuaciones de recurrencia a partir de las matrices de transferencia que se obtengan.

Para lograr esto, los grafos $P(m, 4)$ se han dividido en cuatro categorías, esto debido a los patrones que se definen en cada caso. Cabe destacar que

estos patrones determinan a cada uno de los siguientes grafos de Petersen: $P(4n, 4)$, $P(4n + 1, 4)$, $P(4n + 2, 4)$ y $P(4n + 3, 4)$ haciendo que el grafo $P(m, 4)$ sea visto como $P(4n + r, 4)$ para $r = 0, 1, 2, 3$.

Básicamente, los patrones que se definen son dos: el grafo W_4 y el grafo M , éste último diferente para cada clase. Estos dos grafos son los monografos que permiten la obtención del rotografo, y por tanto, la obtención de los polinomios de independencia del grafo de Petersen $P(m, 4)$.

El resultado que a continuación se enuncia, muestra que, independientemente de la clase que se estudie, la función de recurrencia es la misma, salvo las condiciones iniciales.

Teorema 4.2. *Sea el grafo de Petersen $P(4n + r, 4)$ para $0 \leq r \leq 3$ y sea $R : V(W_4) \rightarrow V(W_4)$ la relación entre los vértices del grafo W_4 consigo mismo. Entonces, el polinomio de independencia de la colección de grafos de Petersen $P(4n + r, 4)$ tiene como ecuación de recurrencia*

$$\det(\text{Id} - zT) = 0$$

donde la matriz T es la matriz de transferencia del fasciografo $W_4 +_R W_4$, para $0 \leq r \leq 3$.

Prueba: En efecto, suponga en primer lugar que $r = 0$, entonces por el Teorema (3.2), se tiene que

$$\mathcal{I}(S_*; z) = I(B; x) - z \frac{(\det(\text{Id} - zT))'}{\det(\text{Id} - zM)}$$

De ésta ecuación, se observa que, la ecuación de recurrencia para calcular los polinomios de independencia de la colección de grafos $P(4n, 4)$ está dada por $\det(\text{Id} - zM)$.

Ahora suponga que $r > 0$. Entonces, para cualquier elemento de la colección de grafos de Petersen $P(4n + r, 4)$, con $n > 0$, puede escribirse mediante la siguiente suma de Zykov

$$P(4n + r, 4) = W_4 \oplus_R W_4 \oplus_R \cdots \oplus_R W_4 \oplus_{S_1} B \oplus_{S_2} W_4$$

donde el número de sumandos W_4 bajo la relación R es n ; S_1 y S_2 son relaciones entre los vértices de los grafos W_4 y B y entre los vértices de B a W_4 , respectivamente.

De lo anterior, el cálculo de la serie de independencia de la colección de grafos $P(4n + r, 4)$ está dada por

$$\mathcal{I}(S_*; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr}(T^{n-1}T_1T_2)$$

donde T es la matriz de transferencia del grafo $W_4 +_R W_4$, T_1 la matriz asociada al grafo $W_4 +_{S_1} B$ y finalmente la matriz T_2 del grafo $B +_{S_2} W_4$.

Además la sucesión de grafos S_k esta definido por

$$S_k = \bigoplus_{j=1}^{k+1} B \oplus_{S_1} M \oplus_{S_2} B$$

Así, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(S_*; z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr}(T^{n-1}T_1T_2) z^n \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}(T^n T_1 T_2) z^n \\ &= z \text{Tr} \left((\text{Id} - zT)^{-1} T_1 T_2 \right) \\ &= \left(\frac{z}{\det(\text{Id} - zT)} \right) \text{Tr} (C^* T_1 T_2) \end{aligned}$$

donde C^* es la matriz de cofactores asociada a la matriz T . De esta última ecuación, se observa que la función de recurrencia para la colección de Petersen $P(4n + r, 4)$ es $\det(\text{Id} - zT)$, para $r = 1, 2, 3$. \square

Así, el teorema anterior proporciona la forma de obtener la función de recurrencia para la colección de Petersen $P(4n + r, 4)$.

En las siguientes apartados se presentan la forma de obtener cada uno de los elementos de la colección de $P(4n + r, 4)$, definiendo en cada apartado, cada relación entre los vértices de los grafos.

2.1. Petersen $P(4n, 4)$. Para obtener el grafo de Petersen de la forma $P(4n, 4)$, se define una suma de Zykov cuyo único monografo está definido como $B = W_4$ (el cual se observa en la Fig 3) donde la relación $R : B \rightarrow B$ está definida por $\{(1, 1), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (7, 2)\}$.

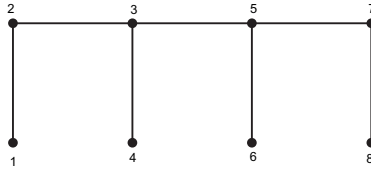


Figura 3. Grafo B

Para obtener cada $P(4n, 4)$ mediante la suma de Zykov, se define la siguiente colección de grafos

$$\begin{aligned}
S_0 &= B \\
S_1 &= B \oplus_R B \\
S_2 &= B \oplus_R B \oplus_R B \\
&\vdots \\
S_i &= \bigoplus_{j=1}^{i+1} B
\end{aligned}$$

Luego, la función $G_{P(4n,4)}(t, z)$ es la función generatriz de la cual se obtienen cada uno de los polinomios de independencia de la familia $P(4n, 4)$, dicha función está dado por

$$(16) \quad G_{P(4n,4)}(t, z) = I(B; t) - z \frac{\partial}{\partial z} \log Q(t, z)$$

donde $I(B; t)$ es el polinomio de independencia del grafo B en variable t , mientras que $Q(t, z)$ está definido por

$$(17) \quad Q(t, z) = \det \left(\text{Id} - z T(B +_R B, 1, t) \right)$$

con Id la matriz identidad de tamaño 60×60 y $T(B +_R B)$ es la matriz de transferencia del grafo B consigo mismo.

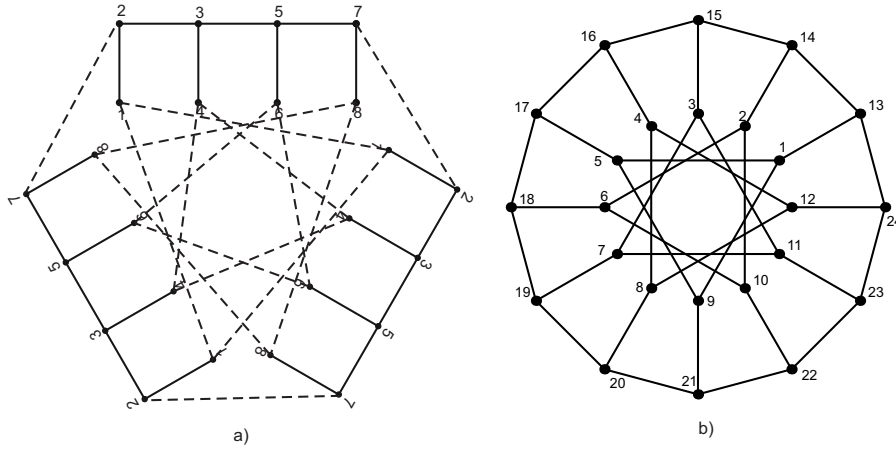


Figura 4. Obtención de $P(12,4)$. En a) se observa la suma de Zykov para la obtención de $P(12,4) = B \oplus_R B \oplus_R B \oplus_R B$, mientras que en b) se observa el grafo $P(12,4)$

A partir de la Ec. 16, se obtiene una ecuación recurrente de grado 17 dada por

$$(18) \quad p_s(t) = \sum_{i=1}^{17} \alpha_i p_{s-i}(t)$$

donde

$$\alpha_1 = 2t^2 + 4t + 1$$

$$\alpha_2 = t(4 + 40t + 148t^2 + 255t^3 + 216t^4 + 80t^5 + 8t^6)$$

$$\alpha_3 = t^2(2t^2 + 4t + 1)(20t^5 + 146t^4 + 260t^3 + 185t^2 + 56t + 6)$$

$$\alpha_4 = -t^3 \left(-4 - 55t - 260t^2 - 252t^3 + 2132t^4 + 9292t^5 + 17424t^6 + 17908t^7 + 10396t^8 + 3244t^9 + 472t^{10} + 24t^{11} \right)$$

$$\alpha_5 = -t^4 \left(98t^{12} + 1708t^{11} + 11784t^{10} + 40460t^9 + 79136t^8 + 94860t^7 + 72220t^6 + 35208t^5 + 10746t^4 + 1896t^3 + 146t^2 - 4t - 1 \right)$$

$$\alpha_6 = t^6 \left(32t^{15} + 992t^{14} + 11356t^{13} + 66172t^{12} + 225864t^{11} + 489060t^{10} + 701968t^9 + 680146t^8 + 441876t^7 + 183638t^6 + 40844t^5 - 376t^4 - 3092t^3 - 895t^2 - 116t - 6 \right)$$

$$\alpha_7 = t^8 \left(280t^{14} + 5544t^{13} + 49509t^{12} + 230680t^{11} + 644120t^{10} + 1175028t^9 + 1473249t^8 + 1306824t^7 + 831982t^6 + 381164t^5 + 124480t^4 + 28252t^3 + 4232t^2 + 376t + 15 \right)$$

$$\alpha_8 = -t^{10} \left(16t^{18} + 864t^{17} + 15180t^{16} + 133176t^{15} + 697634t^{14} + 2412684t^{13} + 5864592t^{12} + 10435532t^{11} + 13956773t^{10} + 14257228t^9 + 11215160t^8 + 6804228t^7 + 3169433t^6 + 1120796t^5 + 294920t^4 + 55836t^3 + 7177t^2 + 560t + 20 \right)$$

$$\alpha_9 = t^{12} \left(120t^{18} + 2968t^{17} + 37039t^{16} + 269456t^{15} + 1237552t^{14} + 3851624t^{13} \right. \\ \left. + 8560474t^{12} + 14080956t^{11} + 17540866t^{10} + 16777088t^9 + 12403130t^8 \right. \\ \left. + 7093568t^7 + 3123554t^6 + 1047168t^5 + 262009t^4 + 47316t^3 \right. \\ \left. + 5820t^2 + 436t + 15 \right)$$

$$\alpha_{10} = t^{14} \left(256t^{20} + 7960t^{19} + 103509t^{18} + 752212t^{17} + 3475732t^{16} \right. \\ \left. + 11007028t^{15} + 25045447t^{14} + 42201336t^{13} + 53627294t^{12} \right. \\ \left. + 51836636t^{11} + 38070830t^{10} + 20942560t^9 + 8288970t^8 \right. \\ \left. + 2095264t^7 + 160910t^6 - 115308t^5 - 57234t^4 - 13804t^3 \right. \\ \left. - 1989t^2 - 164t - 6 \right)$$

$$\alpha_{11} = -t^{16} \left(32t^{21} + 1599t^{20} + 30188t^{19} + 302182t^{18} + 1835976t^{17} \right. \\ \left. + 7398389t^{16} + 21004608t^{15} + 43785880t^{14} + 68941428t^{13} \right. \\ \left. + 83572951t^{12} + 78966668t^{11} + 58555136t^{10} + 34133928t^9 \right. \\ \left. + 15586801t^8 + 5519456t^7 + 1486466t^6 + 293840t^5 + 39744t^4 \right. \\ \left. + 3068t^3 + 30t^2 - 16t - 1 \right)$$

$$\alpha_{12} = -t^{19} (2t + 1) \left(672t^{20} + 15244t^{19} + 154528t^{18} + 922826t^{17} \right. \\ \left. + 3642036t^{16} + 10122720t^{15} + 20602718t^{14} + 31459693t^{13} \right. \\ \left. + 36532720t^{12} + 32393050t^{11} + 21768468t^{10} + 10789798t^9 \right. \\ \left. + 3647272t^8 + 601750t^7 - 135740t^6 - 129758t^5 - 46040t^4 \right. \\ \left. - 9948t^3 - 1364t^2 - 110t - 4 \right)$$

$$\alpha_{13} = t^{22} (t + 1)^2 (2t + 1)^2 \left(56t^{17} + 1396t^{16} + 15524t^{15} + 100670t^{14} \right. \\ \left. + 415544t^{13} + 1158436t^{12} + 2279188t^{11} + 3266552t^{10} \right. \\ \left. + 3486704t^9 + 2812939t^8 + 1729622t^7 + 812093t^6 + 289504t^5 \right. \\ \left. + 77140t^4 + 14900t^3 + 1972t^2 + 160t + 6 \right)$$

$$\alpha_{14} = t^{25} (t + 1)^4 (2t + 1)^2 \left(638t^{15} + 8800t^{14} + 55220t^{13} + 204428t^{12} \right. \\ \left. + 496509t^{11} + 838952t^{10} + 1023312t^9 + 923596t^8 + 626751t^7 \right. \\ \left. + 322276t^6 + 125388t^5 + 36432t^4 + 7675t^3 + 1108t^2 + 98t + 4 \right)$$

$$\alpha_{15} = -t^{28}(t+1)^5(2t+1)^4 \left(20t^{12} + 167t^{11} + 677t^{10} + 1753t^9 + 3059t^8 \right. \\ \left. + 3434t^7 + 2194t^6 + 498t^5 - 294t^4 - 269t^3 - 91t^2 - 15t - 1 \right)$$

$$\alpha_{16} = -t^{32}(t+1)^8(2t+1)^4 \left(82t^8 + 444t^7 + 1030t^6 + 1344t^5 + 1081t^4 \right. \\ \left. + 544t^3 + 166t^2 + 28t + 2 \right)$$

$$\alpha_{17} = t^{36}(t+1)^8(2t+1)^4(t^2+3t+1)^4$$

cuyas condiciones iniciales están dadas por polinomios en variable t , los cuales corresponden a los polinomios de independencia de los grafos $P(4n, 4)$ con $2 \leq n \leq 18$. Los grados de cada uno de estos polinomios son: 7, 9, 14, 16, 21, 23, 28, 30, 35, 37, 42, 44, 49, 51, 56, 58 y 63.

Nota 4.1. El primer grado que se enlistó anteriormente corresponde al valor de $n = 2$, el segundo a $n = 3$ y así sucesivamente hasta que el décimo séptimo grado corresponde a $n = 18$.

A partir de los grados de cada uno de los polinomios de independencia obtenidos de las condiciones iniciales, se puede realizar una hipótesis sobre los grados de cada uno de los polinomios de independencia de los grafos de Petersen $P(4n, 4)$, dicha hipótesis se enuncia a continuación.

Hipótesis 1. *Al tomar dos n consecutivos se obtendrá como resultado que la diferencia de sus grados es siempre igual a una constante α o β , donde el primer valor se obtiene al hacer la diferencia de $\alpha(n)$ con $\alpha(n+1)$ donde n es un número par. Recíprocamente el segundo valor β se obtiene al hacer la misma diferencia pero con n impar.*

Con base en lo anterior se tienen funciones de recurrencia para la obtención del número de independencia, así como los respectivos coeficientes principales y el comportamiento del sistema en $t = -1$, el cual se resume a continuación

Teorema 4.3. *Sea $p_n(t) = I(P(4n, 4), t)$ el polinomio de independencia del grafo de Petersen $P(4n, 4)$ con $n > 3$. Sea $\alpha(n) = \partial(p_n(t))$ y c_n el número de independencia y el coeficiente principal del polinomio de independencia del grafo $P(4n, 4)$. Entonces*

1. *El número de independencia de $P(4n, 4)$, está dado por*

$$(19) \quad \alpha(n) = \begin{cases} 7k & \text{si } n = 2k \\ 7k + 2 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

con $k > 1$

2. El coeficiente principal de $P(4n, 4)$ cumple con

$$(20) \quad c_n = \begin{cases} 2^{k+3} & \text{si } n = 2k \\ \left(\frac{8k^4 + 76k^3 + 322k^2 + 125k - 9}{3} \right) (2^{k-1}) & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

con $k > 1$

3. Finalmente, el comportamiento del sistema en $t = -1$ está dado por

$$(21) \quad p_n(-1) = \begin{cases} 12 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{13} \\ -1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

con $k > 1$

Prueba: En efecto,

1. A partir de cada coeficiente α_i de la ecuación de recurrencia (16) con $1 \leq i \leq 17$ se obtienen los grados máximos que alcanza cada término de la recursión, los cuales se enlistan a continuación

$$(22) \quad \begin{aligned} & 2 + \alpha(n-1); \quad 21 + \alpha(n-6); \quad 37 + \alpha(n-11); \quad 52 + \alpha(n-16); \\ & 7 + \alpha(n-2); \quad 22 + \alpha(n-7); \quad 40 + \alpha(n-12); \quad 56 + \alpha(n-17); \\ & 9 + \alpha(n-3); \quad 28 + \alpha(n-8); \quad 43 + \alpha(n-13); \\ & 14 + \alpha(n-4); \quad 30 + \alpha(n-9); \quad 46 + \alpha(n-14); \\ & 16 + \alpha(n-5); \quad 34 + \alpha(n-10); \quad 49 + \alpha(n-15); \end{aligned}$$

De lo anterior se debe buscar cuáles de estas ecuaciones logra obtener el mismo grado que $\alpha(n)$. Para ello se toma la hipótesis enunciada anteriormente.

Sea $n = 2k$ un número par con $k \geq 1$, luego se obtiene las siguientes igualdades para $\alpha(n)$

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= 5 + \alpha(n-1) = 7 + \alpha(n-2) = 12 + \alpha(n-3) \\ &= 14 + \alpha(n-4) = 19 + \alpha(n-5) = 21 + \alpha(n-6) \\ &= 26 + \alpha(n-7) = 28 + \alpha(n-8) = 33 + \alpha(n-9) \\ &= 35 + \alpha(n-10) = 40 + \alpha(n-11) = 42 + \alpha(n-12) \\ &= 47 + \alpha(n-13) = 49 + \alpha(n-14) = 54 + \alpha(n-15) \\ &= 56 + \alpha(n-16) = 61 + \alpha(n-17) \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones, se eligen de la Ec. 22 aquellas que coincidan; en este caso las únicas ecuaciones que coinciden son:

$$(23) \quad \begin{aligned} \alpha(n) &= 7 + \alpha(n-2) = 14 + \alpha(n-4) = 21 + \alpha(n-6) \\ &= 28 + \alpha(n-8) \end{aligned}$$

Tomando cualquiera de estas igualdades, se obtendrá la ecuación para el número de independencia para el caso de $n = 2k$. Tomando la primera igualdad $\alpha(n) = 7 + \alpha(n-2)$ observe que $\alpha(n-2)$ es el caso de que se quiera obtener el número de independencia de un número par, es decir $\alpha(2(k-1))$ con $k > 2$. Luego se tiene la siguiente ecuación de recurrencia con su respectiva condición inicial:

$$\begin{aligned} \beta(k) &= 7 + \beta(k-1) \\ \beta(1) &= 7 \end{aligned}$$

donde $\beta(k) = \alpha(2k)$, resolviendo la ecuación anterior se obtiene que

$$\alpha(2k) = 7k, \quad k \geq 1$$

Ahora, suponga que $n = 2k + 1$, con $k > 1$ luego se obtienen las siguientes igualdades para el número de independencia:

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= 2 + \alpha(n-1) = 7 + \alpha(n-2) = 9 + \alpha(n-3) \\ &= 14 + \alpha(n-4) = 16 + \alpha(n-5) = 21 + \alpha(n-6) \\ &= 23 + \alpha(n-7) = 28 + \alpha(n-8) = 30 + \alpha(n-9) \\ &= 35 + \alpha(n-10) = 37 + \alpha(n-11) = 42 + \alpha(n-12) \\ &= 44 + \alpha(n-13) = 49 + \alpha(n-14) = 51 + \alpha(n-15) \\ &= 56 + \alpha(n-16) = 58 + \alpha(n-17) \end{aligned}$$

Nuevamente, a partir de estas igualdades se eligen aquellas que coincidan con la Ec. 22, las cuales son

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= 2 + \alpha(n-1) = 7 + \alpha(n-2) = 9 + \alpha(n-3) \\ &= 14 + \alpha(n-4) = 16 + \alpha(n-5) = 21 + \alpha(n-6) \\ &= 28 + \alpha(n-8) = 30 + \alpha(n-9) = 37 + \alpha(n-11) \end{aligned}$$

Tomando $\alpha(n) = 2 + \alpha(n-1)$ se puede observar que el segundo término de la derecha corresponde a calcular el número de independencia $\alpha(n-1)$ con $n-1$ par, de aquí que

$$\begin{aligned} \alpha(2k+1) &= 2 + \alpha(2k) \\ &= 2 + 7k \end{aligned}$$

para $k > 1$.

2. Ahora se demuestran la fórmula correspondientes a los coeficientes principales, para ello se usarán las Ec. 23 y Ec. 24 junto con los coeficientes principales de cada término de la Ec. 18.

Sea $n = 2k$ con $k > 1$, luego por la Ec 23 y Ec. 18 se obtienen aquellos coeficientes principales cuyo número de independencia sea $\alpha(2k)$. De aquí que

$$(24) \quad c_n = 8c_{n-2} - 24c_{n-4} + 32c_{n-6} - 16c_{n-8}$$

La Ec. 24 puede reescribirse como

$$c_m = 8c_{m-1} - 24c_{m-2} + 32c_{m-3} - 16c_{m-4}$$

cuyas condiciones iniciales son $c_2 = 32$, $c_3 = 64$, $c_4 = 128$, $c_5 = 256$. Resolviendo la ecuación se obtiene

$$(25) \quad c_{2k} = 2^{k+3}, \quad k > 1$$

Ahora suponga que $n = 2k + 1$ con $k > 1$, luego los coeficientes principales de la ecuación de recurrencia cuyo número de independencia es $\alpha(n)$ es

$$c_n = 2c_{n-1} + 8c_{n-2} + 40c_{n-3} - 24c_{n-4} - 98c_{n-5} + 32c_{n-6} \\ - 16c_{n-8} + 120c_{n-9} - 32c_{n-11}$$

Esta ecuación puede reescribirse y asociar como

$$(26) \quad c_{2k+1} = \left(8c_{2k-1} - 24c_{2k-3} + 32c_{2k-5} - 16c_{2k-7} \right) \\ + \left(2c_{2k} + 40c_{2(k-1)} - 98c_{2(k-2)} + 120c_{2(k-4)} - 32c_{2(k-5)} \right)$$

Como puede observarse, el coeficiente principal c_{2k+1} está escrito como suma de coeficientes principales para n impar (primer sumando) y par (segundo sumando). En el caso del segundo caso se usa la Ec. 25 cuyo resultado es 2^{k+5} . Luego reescribiendo nuevamente la Eq. 25 se tiene

$$c_m = 8c_{m-1} - 24c_{m-2} + 32c_{m-3} - 16c_{m-4} + 2^{m+5}$$

cuyas condiciones iniciales están dadas por $c(2) = 1510$, $c(3) = 7952$, $c(4) = 33480$, $c(5) = 123552$, para $k > 1$. Resolviendo esta ecuación se obtiene que

$$c_{2k+1} = \left(\frac{8k^4 + 76k^3 + 322k^2 + 125k - 9}{3} \right) \left(2^{k-1} \right), \quad k > 1$$

3. Finalmente, para mostrar el valor que se obtiene al evaluar el polinomio en $t = -1$, basta con evaluar la función Ec. 18 en $t = -1$, resolviendo la ecuación de recurrencia resultante y cuyas condiciones iniciales están dadas por las condiciones iniciales de la Ec. 18, se obtiene el resultado deseado.

□

2.2. Petersen $P(4n + 1)$. En este apartado se define ahora una suma de Zykov cerrada para caracterizar la familia de grafos de Petersen de la forma $P(4n + 1, 4)$. Para ello, se necesitará de dos monografos, (los cuales se ilustran en la Fig 5) $B = W_4$ mientras que el grafo $M = G(V(M), E(M))$ está definido por:

$$V(M) = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$E(M) = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 10\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{7, 8\}, \right. \\ \left. \{7, 9\}, \{9, 10\} \right\}$$

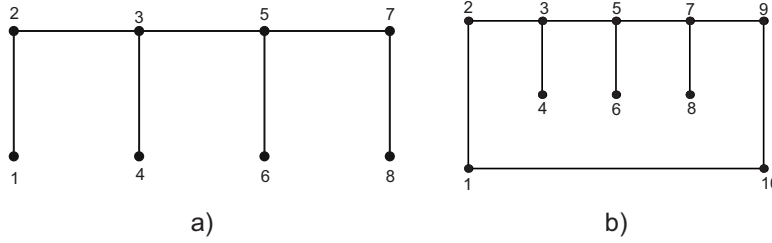


Figura 5. Monografos usados para definir el grafo $P(4n + 1, 4)$. En a) se define el grafo $B = W_4$, mientras que en b) se define el grafo M

A partir de estos grafos, se definen tres relaciones $R_1 : B \rightarrow B$ definidas por $R_1 = \{(1, 1), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (7, 2)\}$, $R_2 : B \rightarrow M$, con $R_2 = R_1$ y la relación $R_3 : M \rightarrow M$ definida por $R_3 = \{(4, 1), (6, 4), (8, 6), (10, 8), (9, 7)\}$. Observe que la ecuación de recurrencia para esta suma de Zykov, es la misma que la Ec. 16, esto por el resultado del Teorema (4.2), sin embargo las condiciones iniciales son polinomios cuyos exponentes son: 7, 11, 14, 18, 21, 25, 28, 32, 35, 39, 42, 46, 49, 53, 56, 60, y 63 para $2 \leq n \leq 18$.

Nuevamente observe que la Hipótesis 1 se cumple para esta familia de grafos, de aquí que, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.4. *Sea $p_n(t) = I(P(4n + 1, 4), t)$ el polinomio de independencia del grafo de Petersen $P(4n + 1, 4)$, con $n \geq 3$. Sea $\alpha(n) = \partial(p_n(t))$ y c_n el número de independencia y el coeficiente principal del polinomio de independencia del grafo $P(4n + 1, 4)$. Entonces*

1. El número de independencia de $P(4n + 1, 4)$, para $n \geq 3$ está dado por

$$(27) \quad \alpha(n) = \begin{cases} 7k & \text{si } n = 2k \\ 7k + 4 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

2. El coeficiente principal de $P(4n + 1, 4)$ cumple con

$$(28) \quad c_n = \begin{cases} 2^k (8k + 1) & \text{si } n = 2k \\ 2^{k+1} (8k + 5) & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

3. Finalmente, el comportamiento del sistema en $t = -1$ está dado por

$$(29) \quad p(-1) = \begin{cases} -12 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{13} \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

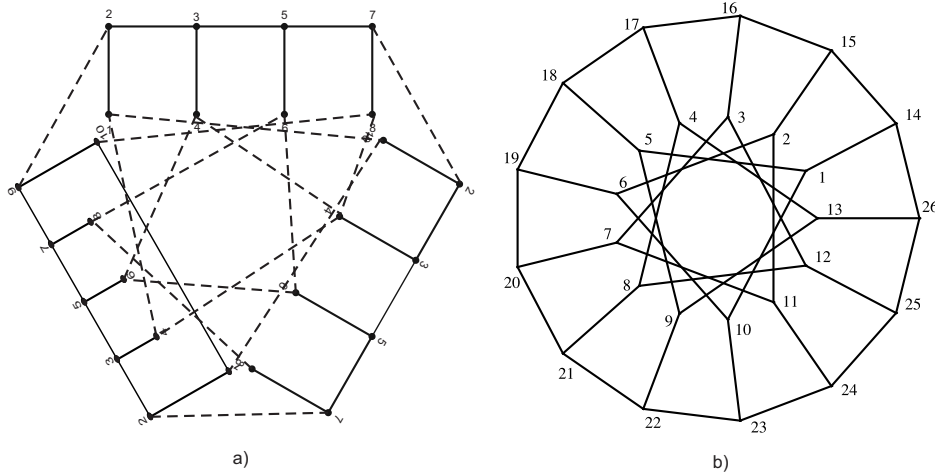


Figura 6. Obtención Petersen $P(13, 4)$. En a) se observa la suma de Zykov cerrada $P(13, 4) = B +_{R_1} B +_{R_2} M +_{R_3} B$, mientras que en b) se observa el resultado final

Prueba: En efecto,

1. Usando nuevamente la hipótesis 1 y la Ec. 22 se obtienen las siguientes igualdades para el número de independencia

$$(30) \quad \begin{aligned} \alpha(n) &= 7 + \alpha(n - 2) = 14 + \alpha(n - 4) = 21 + \alpha(n - 6) \\ &= 28 + \alpha(n - 8) \end{aligned}$$

Para este caso, las igualdades anteriores se cumplen para cuando n sea par o impar. Luego

- Si $n = 2k$, entonces se tiene la siguiente ecuación de recurrencia con su respectiva condición inicial

$$\begin{aligned}\beta(k) &= 7 + \beta(k - 7), & \beta(1) &= 7 \\ \beta(k) &= \alpha(2k).\end{aligned}$$

cuya solución está dada por $\alpha(2k) = 7k$.

- Análogamente, para el caso de que n sea impar se tiene

$$\begin{aligned}\beta(k) &= 7 + \beta(k - 7), & \beta(1) &= 11 \\ \beta(k) &= \alpha(2k + 1).\end{aligned}$$

donde la solución está dada por $\alpha(2k + 1) = 7k + 4$.

2. Para obtener el n -ésimo coeficiente principal, el procedimiento se realiza de manera similar a la prueba mostrada en la sección anterior, la cual consiste en obtener los coeficientes principales de cada término de la Ec. 11 utilizando la Ec. 30 donde el grado del coeficiente principal sea $\alpha(n)$. Observe además que para cualquier valor de $n \geq 3$ la ecuación correspondiente a obtener los coeficientes principales es la misma, salvo diferentes condiciones iniciales así

- Para $n = 2k$, con $k > 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}c_n &= 8c_{n-2} - 24c_{n-4} + 32c_{n-6} - 16c_{n-8} \\ c_4 &= 68, \quad c_6 = 200, \quad c_8 = 528, \quad c_{10} = 1312\end{aligned}$$

Tomando $\beta(k) = \alpha(2k)$ y resolviendo la ecuación resultante se tiene que

$$c_{2k} = 2^k (8k + 1)$$

- Para $n = 2k + 1$, con $k > 1$ la ecuación resultante es

$$\begin{aligned}c_n &= 8c_{n-2} - 24c_{n-4} + 32c_{n-6} - 16c_{n-8} \\ c_5 &= 168, \quad c_7 = 464, \quad c_9 = 1184, \quad c_{11} = 2880\end{aligned}$$

Haciendo $\beta(k) = \alpha(2k + 1)$ y resolviendo la ecuación se tiene

$$c_{2k+1} = 2^{k+1} (8k + 5)$$

3. Haciendo en Ec. 11 $t = -1$ se obtendrá una ecuación de recurrencia para el valor del comportamiento del sistema en $t = -1$. Resolviendo esta última ecuación se obtiene el resultado.

□

2.3. Petersen $P(4n + 2, 4)$. Para definir una suma de Zykov cerrada y obtener grafos que pertenezcan a la familia de grafos de Petersen $P(4n+2, 4)$, es necesario definir dos grafos, $B = W_4$ y el grafo M , el cual está definido por $M = G(V(M), E(M))$

$$V(M) = \{1, 2, \dots, 12\}$$

$$E(M) = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 10\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 12\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{7, 8\}, \right. \\ \left. \{7, 9\}, \{9, 10\}, \{9, 11\}, \{11, 12\} \right\}$$

En la siguiente figura se ilustra los grafos B y M . Además de definir estos grafos, se definen las relaciones que van a tener los vértices de cada uno de éstos.

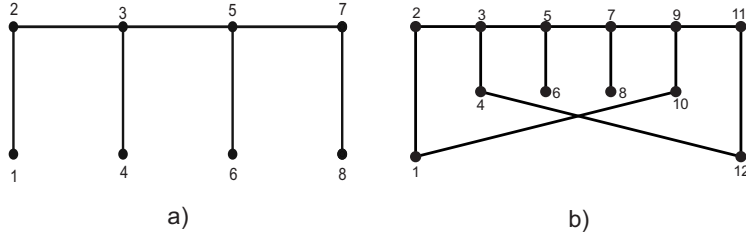


Figura 7. Patrones usados para definir el grafo de Petersen $P(4n + 2, 4)$

Se definen las relaciones: $R_1 : B \rightarrow B$, $R_1 = \{(1, 1), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (7, 2)\}$; $R_2 : B \rightarrow M$, $R_2 = R_1$; y finalmente $R_3 : M \rightarrow B$ esta última definida por $\{(6, 1), (8, 4), (10, 6), (12, 8), (11, 7)\}$.

Por el resultado del Teorema (4.2) la ecuación de recurrencia para esta suma de Zykov es la misma que la que se obtuvo en la suma de Zykov de la familia $P(4n, 4)$, sin embargo las condiciones iniciales son diferentes, a saber son polinomios cuyos grados son: 8, 11, 15, 18, 22, 25, 29, 32, 36, 39, 43, 46, 50, 53, 57, 60 y 64. Nuevamente las diferencias de los grados son siempre una constante, de aquí que la hipótesis 1 se cumple nuevamente y por tanto se tiene el siguiente resultado.

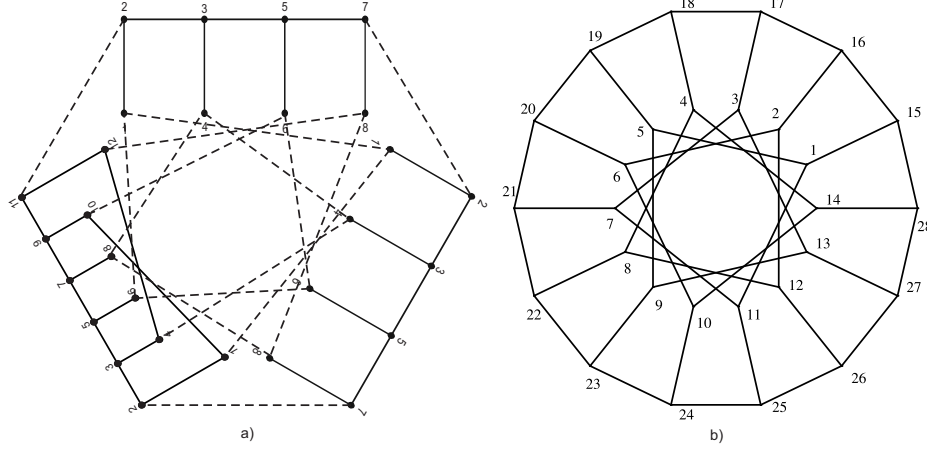


Figura 8. Petersen $P(14, 4)$

Teorema 4.5. Sea $p_n(t) = I(P(4n + 2, 4), t)$ el polinomio de independencia del grafo de Petersen $P(4n + 2, 4)$, con $n \geq 3$. Sea $\alpha(n) = \partial(p_n(t))$ y c_n el número de independencia y el coeficiente principal del polinomio de independencia del grafo $P(4n + 2, 4)$. Entonces

- El número de independencia de $P(4n + 2, 4)$, para $n \geq 3$ está dado por

$$(31) \quad \alpha(n) = \begin{cases} 7k + 1 & \text{si } n = 2k, \text{ con } k = 1, 2, \dots \\ 7k + 4 & \text{si } n = 2k + 1, \text{ con } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- El coeficiente principal de $P(4n + 2, 4)$ cumple con

$$(32) \quad c_n = \begin{cases} 2^k (8k^2 + 14k + 3) & \text{si } n = 2k, k \geq 1 \\ 2^{k-2} (164k^2 + 311k + 141) & \text{si } n = 2k + 1, k \geq 2 \end{cases}$$

- Finalmente, el comportamiento del sistema en $t = -1$ está dado por

$$(33) \quad p(-1) = \begin{cases} 12 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{13} \\ -1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Prueba: La demostración de este resultado es análogo a los resultados enunciados previamente. \square

2.4. Petersen $P(4n + 3, 4)$. Finalmente se definen los monografos $B = W_4$ y $M = G(V(M), E(M))$ donde

$$\begin{aligned} V(M) &= \{1, 2, \dots, 14\} \\ E(M) &= \left\{ \{1, 2\}, \{1, 10\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 12\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 14\}, \right. \\ &\quad \left. \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{9, 10\}, \{9, 11\}, \{11, 12\}, \{11, 13\}, \{13, 14\} \right\} \end{aligned}$$

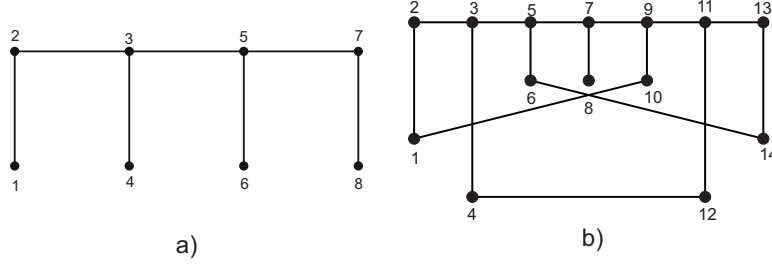


Figura 9. En a) se ilustra el monografo B mientras que en b) el monografo M , ambos monografos usados para la suma de Zykov y así definir la familia de grafos de Petersen $P(4n + 3, 4)$

con las relaciones $R_1 : B \rightarrow B$, $R_1 = \{(1, 1), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (7, 2)\}$; $R_2 : B \rightarrow M$, $R_2 = R_1$; y $R_3 : M \rightarrow B$ esta última definida por $\{(8, 1), (10, 4), (12, 6), (14, 8), (13, 7)\}$.

Por la hipótesis 1, se establece el siguiente resultado para la familia de Petersen $P(4n + 3, k)$ cuya demostración es análoga a las anteriores, la cual se basa en la hipótesis 1.

Teorema 4.6. *Sea $p_n(t) = I(P(4n + 3, 4), t)$ el polinomio de independencia del grafo de Petersen $P(4n + 3, 4)$, con $n \geq 3$. Sea $\alpha(n) = \partial(p_n(t))$ y c_n el número de independencia y el coeficiente principal del polinomio de independencia del grafo $P(4n + 3, 4)$. Entonces*

- *El número de independencia de $P(4n + 3, 4)$ está dado por*

$$(34) \quad \alpha(n) = \begin{cases} 7k + 2 & \text{si } n = 2k \\ 7k + 5 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

- *El coeficiente principal de $P(4n + 3, 4)$ cumple con*

$$(35) \quad c_n = \begin{cases} 5 \cdot 2^{k-1} (8k + 3) & \text{si } n = 2k \\ 2^k \left(\frac{16k^3 + 102k^2 + 173k + 84}{3} \right) & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

- *Finalmente, el comportamiento del sistema en $t = -1$ está dado por*

$$(36) \quad p(-1) = \begin{cases} -12 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{13} \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

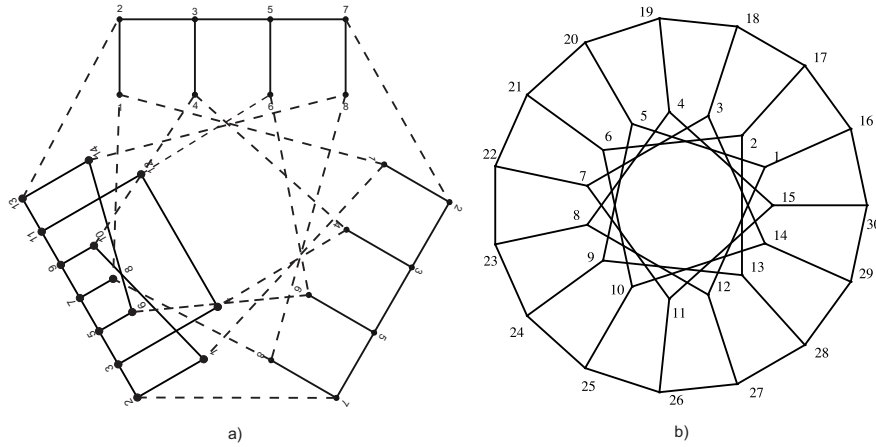


Figura 10. En a) se ilustra la suma de Zykov $B \oplus_{R_1} B \oplus_{R_2} M \oplus_{R_3} B$ mientras que en b) se muestra el grafo de Petersen $P(15, 4)$

2.5. Petersen $P(m, 4)$. Una vez definidas las sumas de Zykov y algunas propiedades de los polinomios de independencia de las familias de grafos $P(4n + r, 4)$ con $r = 0, 1, 2$, y 3 , ahora se obtienen resultados de manera general, es decir el caso para los grafos $P(m, 4)$ con $m > 12$.

En [BEA11] se establecen algunas cotas inferiores del número de independencia de grafos de Petersen $P(m, 4)$, sin embargo, en este trabajo se establecen fórmulas exactas para esta familia de grafos, además del número de independencia se establecen también fórmulas exactas para el número total de conjuntos independientes de cardinalidad máxima como también el comportamiento del sistema en $t = -1$.

Cabe mencionar que estos resultados fueron obtenidos gracias a la hipótesis hecha en el caso de la familia de grafos $P(4n, 4)$ y además dicha hipótesis fue válida para el resto de las familias de grafos. El siguiente enunciado resume los resultados obtenidos anteriormente, gracias a las funciones de recurrencias que se logró mediante la suma de Zykov.

Teorema 4.7. Sea $p_m(t) = I(P(m, 4), t)$ el polinomio de independencia del grafo de Petersen $P(m, 4)$, con $m \geq 13$. Sea $\alpha(m) = \partial(p_m(t))$ y c_m el número de independencia y el coeficiente principal del polinomio de independencia del grafo $P(m, 4)$. Entonces

1. *El grado del polinomio de independencia de Petersen $\alpha(m)$ está dado por*

$$(37) \quad \alpha(m) = \begin{cases} \frac{7m}{8} & \text{si } m \equiv 0 \pmod{8} \\ \frac{7(m-1)}{8} & \text{si } m \equiv 1 \pmod{8} \\ \frac{7(m-2)}{8} + 1 & \text{si } m \equiv 2 \pmod{8} \\ \frac{7(m-3)}{8} + 2 & \text{si } m \equiv 3 \pmod{8} \\ \frac{7(m-4)}{8} + 2 & \text{si } m \equiv 4 \pmod{8} \\ \frac{7(m-5)}{8} + 4 & \text{si } m \equiv 5 \pmod{8} \\ \frac{7(m-6)}{8} + 4 & \text{si } m \equiv 6 \pmod{8} \\ \frac{7(m-7)}{8} + 5 & \text{si } m \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

2. *El m -ésimo coeficiente principal del polinomio de Petersen $P(m,4)$ cumple*

$$(38) \quad c_m = \begin{cases} 2^{\frac{m}{8}+3} & \text{si } m \equiv 0 \pmod{8} \\ m \left(2^{\frac{m-1}{8}}\right) & \text{si } m \equiv 1 \pmod{8} \\ m(m+10) \left(2^{\frac{m-2}{8}-3}\right) & \text{si } m \equiv 2 \pmod{8} \\ 5m \left(2^{\frac{m-3}{8}-1}\right) & \text{si } m \equiv 3 \pmod{8} \\ \frac{m}{3} (m^3 + 60m^2 + 1760m - 9216) \left(2^{\frac{m-4}{8}-10}\right) & \text{si } m \equiv 4 \pmod{8} \\ m \left(2^{\frac{m-5}{8}+1}\right) & \text{si } m \equiv 5 \pmod{8} \\ m(41m + 130) \left(2^{\frac{m-6}{8}-6}\right) & \text{si } m \equiv 6 \pmod{8} \\ \frac{m}{3} (m^2 + 30m + 125) \left(2^{\frac{m-7}{8}-5}\right) & \text{si } m \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

3. El comportamiento del sistema en $t = -1$ está dado por

$$(39) \quad p_m(-1) = \begin{cases} (-1)^m 12 & \text{si } m \equiv 0 \pmod{13} \\ (-1)^{m+1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Prueba: En efecto, los resultados anteriores se obtienen de los resultados previos definiendo mediante sumas de Zykov y haciendo el siguiente cambio de variable $m = 4n + r$ con $r = 0, 1, 2$ y 3

- Si $n = 2k$, para $k > 1$ entonces se hace la sustitución

$$k = \frac{m-r}{8}, \text{ con } r = 0, 1, 2, 3$$

- Por el contrario, si $n = 2k + 1$ con $k > 1$, entonces

$$k = \frac{m-4-r}{8}, \text{ con } r = 0, 1, 2, 3$$

Con las sustituciones anteriores, se obtiene el resultado deseado. \square

3. Conclusiones

En este trabajo se presentaron resultados nuevos en el cálculo del polinomio de independencia, obteniendo funciones generatrices teóricas, dado que estas expresiones son demasiado grandes como para poder escribirlo en este apartado, se dan resultados acerca del número de independencia así como los coeficientes principales y el comportamiento del polinomio en un valor específico de la variable ($t = -1$).

Cabe mencionar que las matrices que se obtenían no eran compresibles, de aquí que no se utilizó la teoría correspondiente de Compresión de matrices, sin embargo para el caso de rotografos aún falta investigar los criterios para comprimir una matriz.

Los artículos [FGS12, BEA11, XYXT09], se encuentran fórmulas cerradas para ciertos casos de Petersen, sin embargo en este apartado se dan fórmulas exactas y se corrobora las cotas inferiores que propone [BEA11] como fórmulas exactas, además se halló una conjetura acerca de la diferencia de los números de independencia para grafos de Petersen $P(m, 2k)$, la cual es la siguiente

$$\alpha(P(2kp + r, 2k)) - \alpha(P(2k(p - 2) + r, 2k)) = 4k - 1$$

para $k \geq 2$, $r = 0, 1, \dots, 2k - 1$ y $p > 2$. Observe que esta fórmula no se encuentra en la literatura, sólo basta probar esta conjetura para dar un aporte más al número de independencia de los grafos de Petersen generalizados y así cerrar una brecha para estos grafos y el cálculo de estos números.

Otro aporte que se da en este trabajo, además del número de independencia, es el caracterizar los coeficientes principales de la familia de Petersen. Esta caracterización junto con la Hipótesis 1 y las funciones de recurrencia permitirá hallar fórmulas cerradas para dichos coeficientes y conocer el comportamiento del polinomio al ser evaluado.

Apéndices

En este apartado, se presentan resultados relevantes usados para la obtención de las funciones generatrices de los polinomios de independencia de rotografos. En primer lugar se enuncian algunas definiciones y propiedades básicas de series formales, posteriormente se presentan algunos resultados de la Teoría de Categorías.

1. Series formales

Una serie de potencias formal, no es otra cosa que una generalización de los polinomios con coeficientes en un anillo K . Las operaciones definidas en estas expresiones son las mismas que se definen en un anillo de polinomios.

Definición A.1. Sea K un anillo. Entonces una serie formal con coeficiente en K es una función $f : \mathbb{N} \rightarrow K$ que se denota como

$$f : \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n$$

además, en estas expresiones se definen dos operaciones:

1. **Suma** Sean $f, g : \mathbb{N} \rightarrow K$, entonces la suma de las series f y g es una función $f + g : \mathbb{N} \rightarrow K$ definida como $(f + g)[n] = f[n] + g[n]$.
2. **Producto:** Sean $f, g : \mathbb{N} \rightarrow K$, entonces la serie producto es una función $f * g : \mathbb{N} \rightarrow K$ definida como

$$(f * g)[n] = \sum_{i+j=n} f[i]g[j].$$

Al igual que en los polinomios, se dice que dos series formales son iguales, si término a término son iguales. Ésto se enuncia a continuación.

Definición A.2. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ dos series formales. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ sí y sólo sí } a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

A partir de la definición de series formales, se observa que el conjunto de series formales sobre un anillo K , denotado por $K[[z]]$ es también un anillo con las operaciones de suma y multiplicación definidas anteriormente.

Proposición A.1. Sea K un anillo con unidad, entonces $(K[[z]], +, *)$ es un anillo con identidad $1 = 1 + 0z + 0z^2 + \dots$

Como puede notar, el anillo $K[[z]]$ no es campo por que, por ejemplo, z no es invertible en $K[[z]]$. La siguiente proposición muestra las condiciones suficientes y necesarias para que una serie formal sea invertible.

Proposición A.2. Sea K un anillo conmutativo con elemento unidad. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in K[[z]]$ es invertible sí y sólo sí a_0 es invertible en K .

Prueba: En efecto,

- Suponga $\sum a_n z^n$ invertible en $K[[z]]$. Luego existe $\sum b_n z^n \in K[[z]]$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\sum a_n z^n \right) \left(\sum b_n z^n \right) &= 1 \\ (a_0 b_0) z^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^1 + \dots &= 1 z^0 + 0 z^1 + \dots \end{aligned}$$

de la última ecuación se tiene que $a_0 b_0 = b_0 a_0 = 1$. Así a_0 es invertible.

- Suponga que a_0 tiene inverso en K . Se desea construir una serie $\sum b_n z^n$ que sea el inverso multiplicativo de $\sum a_n z^n$, es decir

$$(a_n z^n) (b_n z^n) = 1$$

para ello basta tomar

$$b_n = -a_0^{-1} \sum_{\substack{0 < i \leq n \\ 0 \leq j < n}} a_i b_j$$

□

2. Teoría de Categorías

Ahora se procede a enunciar los resultados importantes de la Teoría de Categorías. Para revisar las definiciones de categoría, funtores e isomorfismos de categorías, consultar [Mac98].

En este apartado, $M_{m \times n}(K[[z]])$ denota a la categoría de matrices con entradas en $K[[z]]$, mientras que $M_{m \times n}(K)[[z]]$ representa a la categoría de series formales con coeficientes en $M_{m \times n}(K)$, donde K es un anillo abeliano.

La categoría de series formales con coeficientes matrices $M(K)[[z]]$, está definida como sigue:

Sea K un anillo conmutativo con unidad. Entonces la categoría de series formales con coeficientes en $M_{m \times n}$ se define por

- Objetos: \mathbb{Z}^+
- Flechas: Para cada $u, v \in \mathbb{Z}^+$, se define una flecha de u a v mediante el siguiente diagrama

$$v \xrightarrow{\sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n} u$$

La flecha es una serie formal, donde los coeficientes son matrices $A(n)$ de tamaño $u \times v$.

- Composición: Sean u, v y $w \in \mathbb{Z}^+$. Entonces la composición de flechas se define por

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n \right) \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} A(i)B(j) \right) z^n$$

donde las matrices $A(n)$ y $B(n)$ son matrices de dimension $u \times v$ y $v \times w$, respectivamente.

La composición de flechas establece el producto de series formales con coeficientes matrices. El siguiente diagrama muestra el procedimiento.

$$\begin{array}{ccc}
 & v & \\
 \sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n \nearrow & & \searrow \sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n \\
 w & \xrightarrow{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} A(i)B(j) \right) z^n} & u
 \end{array}$$

- Identidades: Sea $v \in \mathbb{Z}^+$, entonces se define $\text{Id}_v = I_v + 0z + 0z^2 + \dots$, donde I_v representa la matriz identidad de tamaño $v \times v$
- Ley asociativa. La usual.
- Ley de identidades. Se muestra de manera inmediata.

Otra forma de denotar a la categoría de matrices con entradas series formales $K[[z]]$ es $\text{Matr}_{K[[z]]}$, mientras que una alternativa para denotar a la categoría de series formales con coeficientes matrices es $\text{Matr}_K[[z]]$.

Una vez definida la categoría $\text{Matr}_K[[z]]$, se enuncia la siguiente proposición.

Proposición A.3. *La categoría $\text{Matr}_K[[z]]$ es isomorfa a $\text{Matr}_K[[z]]$.*

Prueba: En efecto, se tiene que definir un functor $S : \text{Matr}_K[[z]] \rightarrow \text{Matr}_K[[z]]$ que sea isomorfismo. Tal functor se define como sigue:

- Objetos: Sea $u \in \mathbb{Z}^+$, entonces $S(u) = u$.
- Flechas: Sea

$$v \xrightarrow{\sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n} u$$

elemento en $\text{Matr}_K[[z]]$, entonces

$$S\left(\sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_{\alpha,\beta}(j)z^j\right)_{\substack{1 \leq \alpha \leq u \\ 1 \leq \beta \leq v}}$$

- Se preserva la composición: Sea

$$w \xrightarrow{\sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n} v \xrightarrow{\sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n} u$$

entonces

$$\begin{aligned} S\left(\sum_{n=0}^{\infty} B(n)z^n \circ \sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n\right) &= S\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} B(i)A(j)z^n\right) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} B(i)A(j)\right)_{\alpha,\beta} z^n\right]_{\alpha,\beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} (B(i)A(j))_{\alpha,\beta} z^n\right)_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i+j=n} \sum_{k=1}^v B_{\alpha,k}(i) A_{k,\beta}(j) \right] \right)_{\alpha,\beta} \\
&= \left(\sum_{k=1}^v \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} B_{\alpha,k}(i) A_{k,\beta}(j) \right] \right)_{\alpha,\beta} \\
&= \left(\sum_{k=1}^v \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_{\alpha,k}(n) z^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_{k,\beta}(n) z^n \right] \right)_{\alpha,\beta} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{\alpha,\beta}(n) z^n \right)_{\alpha,\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha,\beta}(n) z^n \right)_{\alpha,\beta} \\
&= S \left(\sum_{n=0}^{\infty} B(n) z^n \right) \circ S \left(\sum_{n=0}^{\infty} A(n) z^n \right)
\end{aligned}$$

- S preserva identidad. Sea $v \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned}
S(\text{Id}_v) &= S(I_v + 0z + \dots) \\
&= I_v
\end{aligned}$$

Con lo anterior, S es un funtor además de ser biyección en objetos y flechas. Luego S es funtor isomorfismo. \square

El siguiente resultado es base para el cálculo de series de independendia.

Corolario A.1. Sea K anillo conmutativo con unidad y $A \in M_{n \times n}(K)$, además $v, w \in M_{n \times 1}$. Entonces

$$\sum_{m=0}^{\infty} v^t A^m w z^m = v^t (I_n - zA)^{-1} w$$

Prueba: En efecto, considere el funtor isomorfismo $S : \text{Matr}_K[[z]] \rightarrow \text{Matr}_K[[z]]$. En $\text{Matr}_K[[z]]$ considere las flechas

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{\sum_{m=0}^{\infty} A^m z^m} & \\
n & & n \\
\uparrow w & & \downarrow v^t \\
1 & \xrightarrow{\sum_{m=0}^{\infty} (v^t A^m w) z^m} & 1
\end{array} & &
\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{S \left(\sum_{m=0}^{\infty} A^m z^m \right)} & \\
n & & n \\
\uparrow S(w) & & \downarrow S(v^t) \\
1 & \xrightarrow{S \left(\sum_{m=0}^{\infty} (v^t A^m w) z^m \right)} & 1
\end{array}
\end{array}$$

Del diagrama de la izquierda, se tiene que

$$\sum_{m=0}^{\infty} (v^t A^m w) z^m = v^t \left(\sum_{m=0}^{\infty} A^m z^m \right) w$$

Aplicando el funtor S se obtiene

$$\begin{aligned} S \left(\sum_{m=0}^{\infty} (v^t A^m w) z^m \right) &= S \left(v^t \left(\sum_{m=0}^{\infty} A^m z^m \right) w \right) \\ &= S(v^t) S \left(\sum_{m=0}^{\infty} A^m z^m \right) S(w) \\ &= v^t S \left(\sum_{m=0}^{\infty} A^m z^m \right) w \end{aligned}$$

Notar que $\text{Hom}_{\text{Matr}_K[[z]]}(n, n)$ es un anillo con la operación de composición (convolución) que es isomorfo, bajo S , a $\text{Hom}_{\text{Matr}_K[[z]]}(n, n)$ como anillo. Por otro lado, en el anillo $\text{Hom}_{\text{Matr}}[[z]](n, n)$.

$$(\text{Id} - Az + 0z^2 + 0z^3 + \dots) \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j z^j \right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j z^j \right) (\text{Id} - Az) = \text{Id}$$

Luego

$$(\text{Id} - Az)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j z^j$$

Así

$$\begin{aligned} S((\text{Id} - Az)^{-1}) &= S((\text{Id} - Az)^{-1}) \\ &= (S(\text{Id}) - S(Az))^{-1} \\ &= (\text{Id} - Az)^{-1} \\ &= S \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j z^j \right) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} S \left(\sum_{j=0}^{\infty} v^t A^j z^j \right) &= v^t S \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j z^j \right) w \\ &= v^t (\text{Id} - zA)^{-1} w \end{aligned}$$

pero $\sum_{j=0}^{\infty} (v^t A^j w) z^j : 1 \rightarrow 1$ y S actúa como la identidad en $\text{Hom}_{\text{Matr}_K[[z]]}(1, 1) = \text{Hom}_{\text{Matr}_K[[z]]}(1, 1)$, luego

$$\sum_{j=0}^{\infty} (v^t A^j w) z^j = v^t (\text{Id} - zA)^{-1} w$$

□

Bibliografía

- [Aro84] J. L. Arocha. Propiedades del polinomio independiente de un grafo. *Revista Ciencias Matemáticas*, V(3):103–110, 1984.
- [BEA11] N. Besharati, B. J. Ebrahimi, and A. Azadi. Independence number of generalized Petersen graphs. *ArXiv e-prints*, 2011.
- [BG86] D. Babić and A. Graovac. The matching polynomial of a polygraph. *Discrete Applied Mathematics*, 15(1):11–24, 1986.
- [BRGG12] C. Bautista Ramos and C. Guillén Galván. Fibonacci numbers of generalized Zykov sums. *Journal of Integer Sequences*, 15(12.7.8), 2012.
- [Die12] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer, 2012.
- [FGS12] J. Fox, R. Gera, and P. Stănică. The independence number for the generalized Petersen graph. *Ars Comb*, CIII:439–451, 2012.
- [Gol81] M. K. Goldberg. Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(3):282–291, 1981.
- [KV03] S. Klavžar and A. Vesel. Computing graph invariants on rotagraphs using dynamic algorithm approach: the case of (2,1)-colorings and independence numbers. *Discrete Applied Mathematics*, 129:449–460, 2003.
- [LM08] P. H. Lundow and K. Maneström. Exact and approximate compression of transfer matrices for graph homomorphisms. *LMS Journal Computation and Mathematics*, 11:1–14, 2008.
- [Mac98] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, 1998. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.
- [VM05] E. L. Vadim and E. Mandrescu. The independence polynomial of a graph - a survey. In *Proceedings of the 1st. International Conference on Algebraic Informatics*, pages 233–254, 2005.
- [XYXT09] L. C. Xu, Y. S. Yang, Z. Q. Xia, and J. X. Tian. On the independence number of the generalized Petersen graph $P(n, k)$. pages 40–45, Zhangjiajie, China, 2009. OSR & APORC.